DOWODZENIE TWIERDZEŃ GEOMETRYCZNYCH METODAMI GEOMETRII ANALITYCZNEJ

WSTĘP

Niniejsze opracowanie jest przeznaczone przede wszystkim dla uczniów, którzy chcą poszerzyć swoją wiedzę zdobytą w szkole. Szczególnie jest ono adresowane do tych uczniów, którzy chcą przygotować się do startu w Olimpiadzie Matematycznej. Elementy geometrii analitycznej znajdują się w programie liceum. Te podstawy geometrii analitycznej przypomnimy na początku. W programie szkolnym zbyt mało uwagi poświęca się wektorom. Jest to pojęcie bardzo ważne, mające liczne zastosowania. Użycie wektorów bardzo uprości wiele rozumowań w geometrii analitycznej. Dlatego początkową część opracowania rozpoczniemy od przypomnienia podstawowych własności wektorów, a następnie zajmiemy się tymi własnościami wektorów, o których na ogół w szkole się nie mówi. Te własności wykorzystamy następnie przy omawianiu równań prostych.

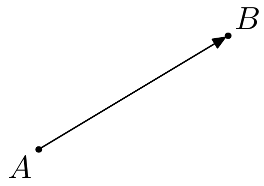
Twierdzeń geometrycznych można dowodzić różnymi metodami. Uczniowie startujący w Olimpiadzie Matematycznej mogą poznać wiele pomysłowych i oryginalnych rozwiązań takich zadań (można je znaleźć w corocznych sprawozdaniach z Olimpiad, znajdujących się na stronie internetowej Olimpiady). Rozwiązania analityczne na pewno nie są tak pomysłowe i eleganckie jak większość prezentowanych tam rozwiązań. Są to natomiast rozwiązania w pewnym sensie rutynowe. W wykształceniu dobrego matematyka geometria analityczna zajmuje ważne miejsce; jest to istotny fragment tzw. warsztatu matematycznego, którego dobre przyswojenie jest jednym z koniecznych elementów wszechstronnego wykształcenia matematycznego. Umiejętność dowodzenia twierdzeń geometrycznych metodami analitycznymi jest tak naprawdę sprawdzianem opanowania tego warsztatu.

Cały tekst składa się z 6 części. W pierwszej zaczynamy od przypomnienia podstawowych pojęć i wzorów z geometrii analitycznej płaszczyzny. Część druga to krótki zbiór zadań ilustrujących główne pomysły stosowane w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej. W części trzeciej zamieszczamy rozwiązania tych zadań. W czwartej części pokazujemy kilka bardziej rozbudowanych zadań będących szczególnymi przypadkami znanych i ważnych twierdzeń geometrycznych. W piątej części dowodzimy tych twierdzeń w ogólności. Wreszcie w części szóstej pokazujemy kilkanaście oryginalnych zadań olimpijskich, które można rozwiązać metodami geometrii analitycznej.

CZĘŚĆ I
PODSTAWOWE POJĘCIA GEOMETRII ANALITYCZNEJ

1.1. Wektory

Wektorem na płaszczyźnie nazywamy parę uporządkowaną punktów. Pierwszy element pary nazywamy **początkiem** wektora, drugi **końcem**. Wektor, którego początkiem jest punkt A, a końcem punkt B, oznaczamy symbolem $\overrightarrow{AB}$. Na rysunku wektory przedstawiamy za pomocą strzałek:



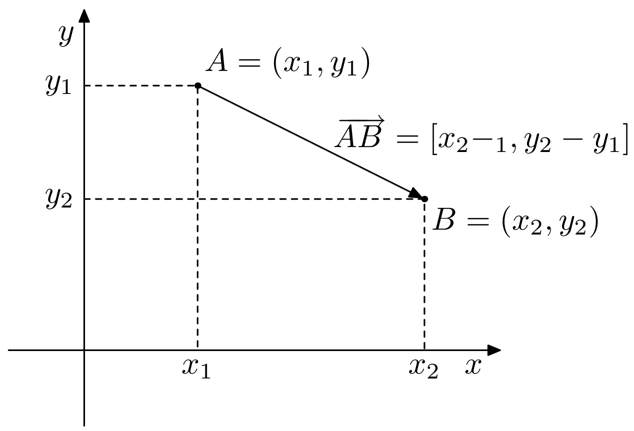
Często wektory oznaczamy pogrubionymi małymi literami (ze strzałką u góry), np. $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$.

Wektorem zerowym nazywamy wektor, którego początek i koniec pokrywają się. Tak więc dla dowolnego punktu A wektor $\overrightarrow{AA}$ jest wektorem zerowym. Wektor zerowy będziemy oznaczać symbolem $\overrightarrow{\boldsymbol{o}}$.

Wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{BA}$. Wektor przeciwny do wektora $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ oznaczamy symbolem $-\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$.

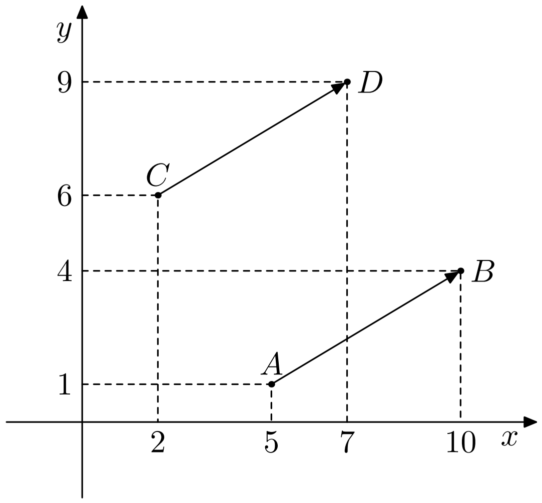
1.2. Wektory w układzie współrzędnych

Jeśli wybierzemy układ współrzędnych na płaszczyźnie, to każdemu wektorowi możemy przyporządkować dwie **współrzędne**. Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ otrzymujemy odejmując współrzędne początku wektora (czyli punktu A) od współrzędnych jego końca (czyli punktu B). W szczególności $\overrightarrow{\boldsymbol{o}} = [0, 0]$.



$$\text{Jeśli } A = (x_1, y_1) \text{ oraz } B = (x_2, y_2), \text{ to } \overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1].$$

Mówimy, że wektory są **równe**, jeśli mają jednakowe współrzędne.



Na powyższym rysunku:

$$A = (5, 1), \quad B = (10, 4), \quad C = (2, 6) \quad \text{oraz} \quad D = (7, 9).$$

Mamy zatem

$$\overrightarrow{AB} = [10 - 5, 4 - 1] = [5, 3] = [7 - 2, 9 - 6] = \overrightarrow{CD}.$$

1.3. Długość wektora

Długością wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy długość odcinka AB; oznaczamy ją symbolem $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
Mamy zatem

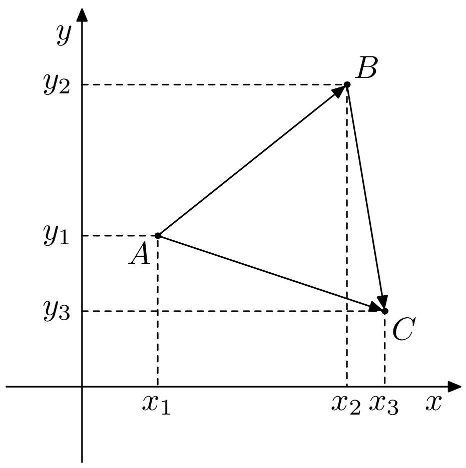
$$\text{jeśli } A = (x_1, y_1) \text{ oraz } B = (x_2, y_2), \text{ to } \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

lub inaczej

$$\left|[x, y]\right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1.4. Działania na wektorach

Jeśli mamy dane trzy punkty A, B i C na płaszczyźnie, to mówimy, że wektor $\overrightarrow{AC}$ jest **sumą** wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.



Mamy zatem

$$\overrightarrow{AC} = [x_3 - x_1, y_3 - y_1] = [(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2), (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2)].$$

Współrzędne sumy dwóch wektorów otrzymujemy zatem dodając odpowiednie współrzędne obu wektorów:

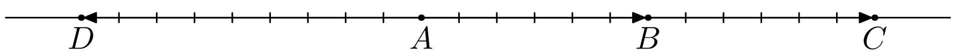
$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d].$$

Czasami mówimy, że dodawanie wektorów wykonujemy „po współrzędnych". Nietrudno sprawdzić, że tak określone dodawanie wektorów jest identyczne ze znanym z fizyki dodawaniem metodą równoległoboku.

Wektory można też mnożyć przez liczbę rzeczywistą. Przypuśćmy, że dany jest wektor $\overrightarrow{AB}$ i dana jest liczba rzeczywista t. Wektor $t \cdot \overrightarrow{AB}$ definiujemy w następujący sposób.

- Jeśli $t > 0$, to na półprostej AB znajdujemy taki punkt C, że $|AC| = t \cdot |AB|$ i przyjmujemy $t \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
- Jeśli $t < 0$, to na drugiej półprostej o początku w punkcie A znajdujemy taki punkt C, że $|AC| = |t| \cdot |AB|$ i przyjmujemy $t \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
- Wreszcie, jeśli $t = 0$, to przyjmujemy $t \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{\boldsymbol{o}} = \overrightarrow{AA}$.

Wektor $t \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$ nazywamy **iloczynem** wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$ przez liczbę rzeczywistą t. Na poniższym rysunku mamy $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{AD} = (-\frac{3}{2}) \cdot \overrightarrow{AB}$:



Zauważmy, że z przyjętej definicji iloczynu wektora przez liczbę wynika, że

$$\left|t \cdot \vec{\boldsymbol{a}}\right| = |t| \cdot \left|\vec{\boldsymbol{a}}\right|.$$

Nietrudno zauważyć, że również

$$(-1) \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = -\vec{\boldsymbol{a}}.$$

Mnożenie wektora przez liczbę rzeczywistą też wykonujemy „po współrzędnych", tzn. w następujący sposób:

$$t \cdot [x, y] = [tx, ty].$$

W szczególności

$$-[x, y] = (-1) \cdot [x, y] = [-x, -y]$$

oraz

$$[a, b] - [c, d] = [a, b] + (-1) \cdot [c, d] = [a - c, b - d].$$

Jeśli mamy dany wektor $\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{AB}$, to mówimy też, że punkt B powstał przez dodanie wektora $\vec{\boldsymbol{v}}$ do punktu A:

$$B = A + \vec{\boldsymbol{v}} = A + \overrightarrow{AB}.$$

Jeśli $A = (x, y)$ oraz $\vec{\boldsymbol{v}} = [a, b]$, to

$$B = A + \vec{\boldsymbol{v}} = (x, y) + [a, b] = (x + a, y + b).$$

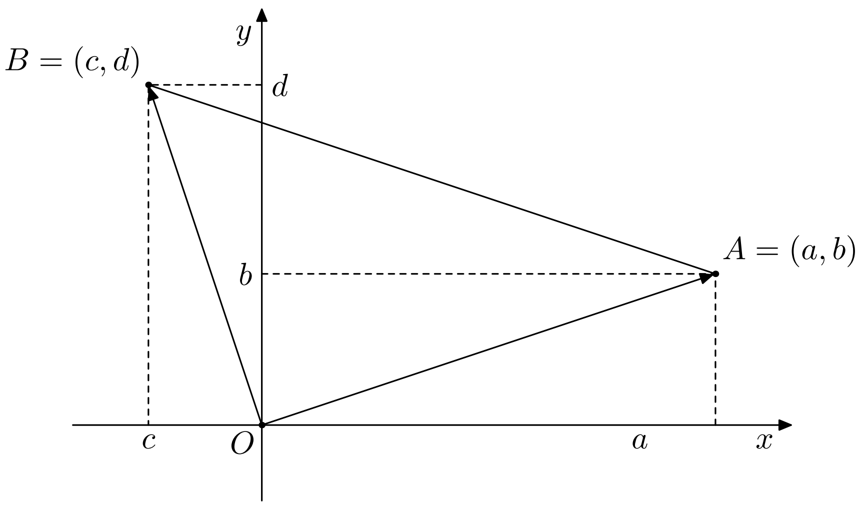
Widzimy zatem, że dodawanie wektora do punktu wykonujemy także „po współrzędnych".

1.5. Wektory prostopadłe

Mówimy, że wektory niezerowe $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy proste AB i CD są prostopadłe. Piszemy wtedy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$. Ponadto przyjmiemy, że wektor zerowy jest prostopadły do każdego wektora.

Chcemy znaleźć teraz warunek konieczny i wystarczający na to, by wektory $\vec{\boldsymbol{v}} = [a, b]$ i $\vec{\boldsymbol{w}} = [c, d]$ były prostopadłe. Wybierzmy zatem w układzie współrzędnych trzy punkty

$$O = (0, 0), \quad A = (a, b), \quad B = (c, d).$$



Wówczas $\overrightarrow{OA} = [a, b] = \vec{\boldsymbol{v}}$ oraz $\overrightarrow{OB} = [c, d] = \vec{\boldsymbol{w}}$. Przypuśćmy najpierw, że oba wektory $\vec{\boldsymbol{v}}$ i $\vec{\boldsymbol{w}}$ są niezerowe. Wówczas $\vec{\boldsymbol{v}} \perp \vec{\boldsymbol{w}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt OAB jest prostokątny (z kątem prostym w wierzchołku O), czyli zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa wtedy i tylko wtedy, gdy $|OA|^2 + |OB|^2 = |AB|^2$. Mamy teraz

$$\begin{aligned} |OA|^2 &= a^2 + b^2, \\ |OB|^2 &= c^2 + d^2, \\ |AB|^2 &= (c - a)^2 + (d - b)^2. \end{aligned}$$

A więc

$$\vec{\boldsymbol{v}} \perp \vec{\boldsymbol{w}} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2,$$

czyli

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = c^2 - 2ac + a^2 + d^2 - 2bd + b^2.$$

Zatem

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow -2ac - 2bd = 0,$$

czyli ostatecznie

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow ac + bd = 0.$$

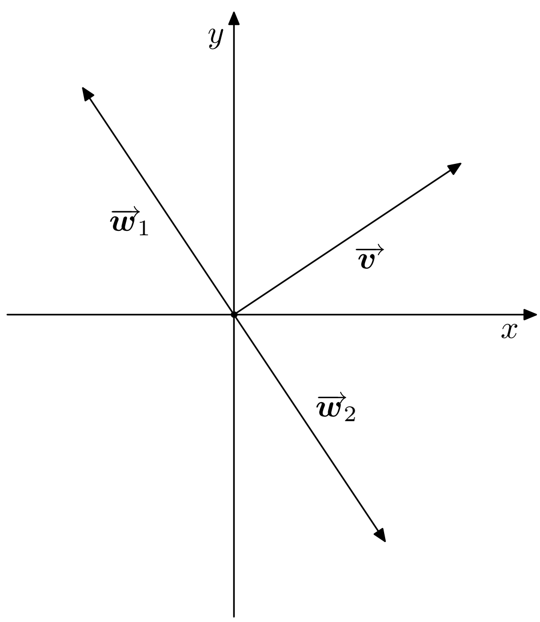
Zauważmy następnie, że jeśli któryś z wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest wektorem zerowym, to równość $ac + bd = 0$ też jest spełniona. Stąd wynika, że dla dowolnych wektorów mamy następujący warunek prostopadłości

$$[a, b] \perp [c, d] \Leftrightarrow ac + bd = 0.$$

Powyższy warunek prostopadłości wektorów pozwala łatwo podać przykłady wektorów prostopadłych do danego wektora. Dla dowolnego wektora $\vec{v} = [a, b]$ następujące wektory są prostopadłe do wektora $\vec{v}$:

$$\vec{w}_1 = [-b, a] \quad \text{oraz} \quad \vec{w}_2 = [b, -a].$$

Zauważmy przy tym, że te dwa wektory mają taką samą długość jak wektor $\vec{v}$. Istnieją tylko dwa wektory tej samej długości, prostopadłe do wektora $\vec{v}$. Można się przekonać, że wektor $\vec{w}_1$ powstaje przez obrót wektora $\vec{v}$ o $90°$ (wokół początku) w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a wektor $\vec{w}_2$ powstaje przez analogiczny obrót w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara:



1.6. Wektory równoległe

Mówimy, że wektory niezerowe $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ są **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy proste AB i CD są równoległe. Piszemy wtedy $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$. Ponadto przyjmiemy, że wektor zerowy jest równoległy do każdego wektora.

Przypuśćmy, że mamy dane dwa wektory $\overrightarrow{v} = [a, b]$ i $\overrightarrow{w} = [c, d]$. Niech $\overrightarrow{u}$ będzie dowolnym wektorem prostopadłym do wektora $\overrightarrow{v}$, np. $\overrightarrow{u} = [-b, a]$. Wówczas

$$\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w},$$

czyli

$$\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{w} \Leftrightarrow [-b, a] \perp [c, d] \Leftrightarrow -bc + ad = 0 \Leftrightarrow ad = bc.$$

Otrzymaliśmy zatem warunek równoległości wektorów:

$$[a, b] \parallel [c, d] \Leftrightarrow ad = bc.$$

Nietrudno zauważyć, że jeśli $[c, d] = t \cdot [a, b]$ dla pewnej liczby rzeczywistej t, to

$$[a, b] \parallel [c, d].$$

Mamy bowiem wtedy

$$ad = a \cdot tb = ta \cdot b = bc.$$

Prawdziwe jest też następujące wynikanie odwrotne: jeśli $[a, b] \parallel [c, d]$ oraz $[a, b] \neq [0, 0]$, to istnieje taka liczba rzeczywista t, że $[c, d] = t \cdot [a, b]$. Jeśli bowiem $a \neq 0$, to wystarczy przyjąć $t = \frac{c}{a}$; jeśli natomiast $a = 0$, to $b \neq 0$ i wystarczy przyjąć $t = \frac{d}{b}$. Z założenia wiemy, że $ad = bc$. Nietrudno sprawdzić, że w obu przypadkach mamy $[c, d] = t \cdot [a, b]$. Mamy zatem następujący warunek równoległości wektorów:

$$\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{o} \quad \text{lub istnieje taka liczba rzeczywista } t, \text{ że} \quad \overrightarrow{w} = t \cdot \overrightarrow{v}.$$

1.7. Iloczyn skalarny wektorów

Wprowadzamy następujące działanie na wektorach. Przypuśćmy, że dane są wektory $\overrightarrow{v} = [a, b]$ i $\overrightarrow{w} = [c, d]$. Wówczas definiujemy

$$[a, b] \cdot [c, d] = ac + bd.$$

Należy zwrócić uwagę na to, że wynik tego działania nie jest wektorem; jest liczbą rzeczywistą (skalarem). Stąd nazwa działania: **iloczyn skalarny** wektorów.

Za pomocą iloczynu skalarnego możemy łatwo wyrazić warunek prostopadłości wektorów:

$$\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0.$$

Z łatwością sprawdzamy, że iloczyn skalarny ma następujące własności.

Dla dowolnych wektorów $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ i $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$:

- $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$,
- $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{o}} = 0$,
- $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}}$,
- $(t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot (t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = t \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ dla dowolnej liczby rzeczywistej t,
- w szczególności $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot (-\overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = -(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}})$,
- $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}^2 = \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} = |\overrightarrow{\boldsymbol{v}}|^2$.

Z czwartej własności wynika w szczególności, że zapis $t \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ nie prowadzi do nieporozumień: kolejność wykonywania działań jest obojętna. Należy jednak zauważyć, że działanie iloczynu skalarnego dla trzech wektorów na ogół nie jest łączne. Przypuśćmy bowiem, że mamy dane trzy wektory $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ i $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$. Wówczas iloczyn skalarny $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ jest liczbą rzeczywistą, a więc wektor $(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ jest wektorem równoległym do $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$. Z drugiej strony, iloczyn skalarny $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ też jest liczbą rzeczywistą, a więc wektor $\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}})$ jest wektorem równoległym do $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$. A więc, jeśli wektory $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$ i $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ nie są równoległe, to na pewno

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{u}} \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}}).$$

Z powyższych własności iloczynu skalarnego łatwo wynika następująca równość, przypominająca znany wzór skróconego mnożenia:

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}})^2 = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^2.$$

Mamy bowiem

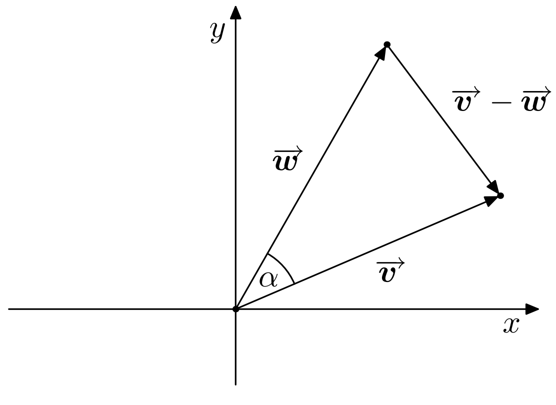
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}})^2 &= (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \cdot (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) = (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} + (\overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}}) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} + \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}} = \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^2.\end{aligned}$$

Podstawiając następnie $-\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ w miejsce $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$, otrzymujemy wzór

$$(\overrightarrow{\boldsymbol{v}} - \overrightarrow{\boldsymbol{w}})^2 = \overrightarrow{\boldsymbol{v}}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{w}} + \overrightarrow{\boldsymbol{w}}^2.$$

1.8. Kąt między wektorami

Przypuśćmy, że mamy dane dwa wektory niezerowe $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ i $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ zaczepione w jednym punkcie (bez straty ogólności możemy przyjąć, że tym punktem jest początek układu współrzędnych). Niech α będzie kątem między tymi wektorami.



Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy wtedy

$$|\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{w}}|^2 = |\vec{\boldsymbol{v}}|^2 + |\vec{\boldsymbol{w}}|^2 - 2 \cdot |\vec{\boldsymbol{v}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{w}}| \cdot \cos\alpha.$$

Z drugiej strony

$$|\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{w}}|^2 = (\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{w}})^2 = \vec{\boldsymbol{v}}^2 - 2 \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} + \vec{\boldsymbol{w}}^2 = |\vec{\boldsymbol{v}}|^2 - 2\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} + |\vec{\boldsymbol{w}}|^2.$$

Otrzymujemy zatem równość

$$|\vec{\boldsymbol{v}}|^2 + |\vec{\boldsymbol{w}}|^2 - 2 \cdot |\vec{\boldsymbol{v}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{w}}| \cdot \cos\alpha = |\vec{\boldsymbol{v}}|^2 - 2\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} + |\vec{\boldsymbol{w}}|^2,$$

czyli

$$-2 \cdot |\vec{\boldsymbol{v}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{w}}| \cdot \cos\alpha = -2\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}}.$$

Po podzieleniu obu stron przez $-2 \cdot |\vec{\boldsymbol{v}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{w}}|$ otrzymujemy wzór

$$\cos\alpha = \frac{\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}}}{|\vec{\boldsymbol{v}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{w}}|}.$$

Z tego wzoru wynikają następujące wnioski:

- jeśli $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} > 0$, to kąt α jest ostry,
- jeśli $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = 0$, to kąt α jest prosty,
- jeśli $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} < 0$, to kąt α jest rozwarty.

1.9. Równanie prostej

Przypuśćmy, że mamy dany punkt $A = (x_0, y_0)$ oraz wektor $\vec{\boldsymbol{v}} = [a, b] \neq [0, 0]$. Niech k będzie prostą prostopadłą do wektora $\vec{\boldsymbol{v}}$ i przechodzącą przez punkt A. Chcemy wyznaczyć równanie prostej k.

Zauważmy, że punkt $P = (x, y)$ leży na prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\vec{\boldsymbol{v}}$ i $\overrightarrow{AP}$ są prostopadłe, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$. Obliczmy ten iloczyn skalarny. Mamy $\overrightarrow{AP} = [x - x_0, y - y_0]$ i wówczas

$$\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \overrightarrow{AP} = [a, b] \cdot [x - x_0, y - y_0] = a(x - x_0) + b(y - y_0) = ax + by - (ax_0 + by_0).$$

Otrzymaliśmy zatem równanie prostej k: punkt $P = (x, y)$ leży na prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne spełniają równanie

$$ax + by - (ax_0 + by_0) = 0,$$

czyli

$$ax + by = ax_0 + by_0.$$

Pokazaliśmy, że każda prosta ma równanie **liniowe**, tzn. postaci $ax+by = c$ dla pewnych liczb rzeczywistych a, b i c (takich, że $[a, b] \neq [0, 0]$, tzn. takich, że liczby a i b nie mogą jednocześnie być równe 0). Pokażemy teraz, że każde równanie liniowe jest równaniem pewnej prostej. Przypuśćmy zatem, że mamy dane równanie $ax + by = c$ oraz liczby a i b nie są jednocześnie równe 0. Istnieją wówczas liczby x_0 i y_0 takie, że $ax_0 + by_0 = c$. Jeśli bowiem $a \neq 0$, to wystarczy przyjąć $y_0 = 0$ oraz $x_0 = \frac{c}{a}$. Jeśli zaś $b \neq 0$, to możemy przyjąć $x_0 = 0$ oraz $y_0 = \frac{c}{b}$. Teraz dokładnie tak jak wyżej, pokazujemy, że równaniem prostej prostopadłej do wektora $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = [a, b]$ i przechodzącej przez punkt $A = (x_0, y_0)$ jest właśnie równanie $ax + by = c$.

Równanie postaci $ax + by = c$ nazywamy **równaniem ogólnym** prostej. Często korzystamy z tzw. **równania kierunkowego**. Jeśli w równaniu ogólnym $ax + by = c$ mamy $b \neq 0$, to możemy wyznaczyć y:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{a}.$$

Otrzymaliśmy równanie postaci $y = kx + l$, gdzie k i l są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Każda prosta, z wyjątkiem prostych równoległych do osi Oy ma równanie tej postaci. Proste równoległe do osi Oy mają natomiast równania postaci $x = m$, gdzie m jest liczbą rzeczywistą.

Zauważmy, że prosta ma nieskończenie wiele równań. Równanie $ax+by = c$ jest bowiem równoważne każdemu równaniu $atx + bty = ct$ dla $t \neq 0$. Zatem polecenie „wyznacz równanie prostej" należy rozumieć jako: „wyznacz którekolwiek równanie prostej".

1.10. Proste prostopadłe i równoległe

Przypuśćmy, że mamy dane dwie proste k i l o równaniach odpowiednio

$$ax + by = c \quad \text{oraz} \quad px + qy = r.$$

Wiemy już, że prosta k jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = [a, b]$, a prosta l jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{\boldsymbol{w}} = [p, q]$. Wówczas proste k i l są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ i $\overrightarrow{\boldsymbol{w}}$ są prostopadłe. Podobnie, proste k i l są równoległe, gdy te wektory są równoległe. Mamy zatem

$$k \perp l \Leftrightarrow ap + bq = 0$$

oraz

$$k \parallel l \Leftrightarrow aq = bp.$$

Równanie prostej równoległej do prostej k możemy zatem zapisać w postaci $ax+by = d$ dla pewnego d. Podobnie równanie prostej prostopadłej do k możemy zapisać w postaci $bx - ay = d$ dla dowolnego d.

W przypadku, gdy mamy dane równania kierunkowe obu prostych (np. prosta k ma równanie $y = ax + b$, a prosta l ma równanie $y = cx + d$), warunki prostopadłości i równoległości są jeszcze prostsze. Mamy bowiem (szczegóły dowodu pozostawimy jako ćwiczenie):

$$k \perp l \Leftrightarrow ac = -1,$$

czyli $c = -\frac{1}{a}$ oraz
$$k \parallel l \Leftrightarrow a = c.$$

Jak widzimy, o kierunku prostej decyduje współczynnik stojący przy x w równaniu kierunkowym. Dlatego ten współczynnik nazywamy **współczynnikiem kierunkowym**.

1.11. Równania parametryczne prostej i odcinka

Przypuśćmy, że dany jest punkt $A = (x_0, y_0)$ i wektor $\vec{v} = [a, b]$. Wówczas wszystkie punkty $P = (x, y)$ postaci $P = A + t \cdot \vec{v}$, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą, tworzą prostą k równoległą do wektora $\vec{v}$ i przechodzącą przez punkt A. Współrzędne takich punktów P są opisane równaniami

$$\begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb. \end{cases}$$

Równania te, przedstawiane także w postaci

$$(x, y) = (x_0 + ta, y_0 + tb)$$

nazywamy **równaniami parametrycznymi** prostej.

W szczególności możemy w ten sposób przedstawić równania parametryczne prostej AB. Przypuśćmy zatem, że

$$A = (x_0, y_0), \quad B = (x_1, y_1).$$

Definiujemy wektor $\vec{v}$ wzorem

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = [x_1 - x_0, y_1 - y_0].$$

Mamy wówczas następujące równania parametryczne prostej AB:

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0), \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0). \end{cases}$$

Wartości parametru t określają również położenie punktu $P = (x, y)$ na prostej AB:

- jeśli $t > 1$, to punkt P leży na półprostej AB za punktem B,
- jeśli $t = 1$, to $P = B$,
- jeśli $0 < t < 1$, to punkt P leży na odcinku AB,
- jeśli $t = 0$, to $P = A$,
- jeśli $t < 0$, to punkt P leży na półprostej BA za punktem A.

W szczególności, jeśli $t = \frac{1}{2}$, to punkt P jest środkiem odcinka AB. Nietrudne obliczenia pokazują, że wtedy
$$P = \left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2} \right).$$

Jeśli $0 < t < 1$, to punkt $P = A + t \cdot \overrightarrow{AB}$ dzieli (wewnętrznie) odcinek A w stosunku $t : (1 - t)$.

1.12. Równanie okręgu

Przypuśćmy, że mamy dane: punkt $S = (x_0, y_0)$ i liczbę rzeczywistą r. Punkt $P = (x, y)$ leży wówczas na okręgu o środku S i promieniu r wtedy i tylko wtedy, gdy $|SP| = r$, czyli $|SP|^2 = r^2$. Tę ostatnią równość można zapisać w postaci równania

$$(x - x|_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

To równanie nazywamy **równaniem okręgu** (w postaci kanonicznej). Po otwarciu nawiasów otrzymujemy równanie okręgu w postaci ogólnej (rozwiniętej):

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r = 0.$$

Zauważmy, że równanie okręgu jest równaniem kwadratowym. Natomiast nie każde równanie kwadratowe jest równaniem okręgu. Warunkiem koniecznym jest to, by współczynniki przy x^2 i y^2 były równe (po podzieleniu oby stro równania przez ten wspólny współczynniki, dostaniemy współczynniki równe 1) oraz by nie występował wyraz xy. Ten warunek konieczny nie jest jednak wystarczający. Zauważmy, że równanie

$$x + 2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0,$$

czyli

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$$

jest spełnione przez współrzędne tylko jednego punktu: $(-1, -1)$. Z kolei równania

$$x + 2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0,$$

czyli

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = -1$$

nie spełniają współrzędne żadnego punktu.

Rozstrzygnięcie, jaką krzywą opisuje dowolne równanie kwadratowe, jest zagadnieniem wykraczającym poza program szkolny.

CZĘŚĆ II
ZBIÓR ZADAŃ

Zadanie 2.1. Wyznacz koniec B odcinka AB, gdy dane są: początek $A = (-3, 2)$ i środek $S = (5, 1)$ tego odcinka.

Zadanie 2.2. Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie $S = (2, 3)$ i promieniu $r = 5$.

Zadanie 2.3. Znajdź współrzędne środka i promień okręgu o równaniu

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$$

Zadanie 2.4. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, którego końce mają współrzędne $A = (2, 4)$, $B = (-1, 3)$.

Zadanie 2.5. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (4, 1)$ i prostopadłej do prostej o równaniu $2x - y + 3 = 0$.

Zadanie 2.6. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (3, 5)$ i równoległej do prostej o równaniu $2x + y - 5 = 0$.

Zadanie 2.7. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C, gdzie: $A = (2, 3)$, $B = (-1, 4)$, $C = (3, 1)$.

Zadanie 2.8. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C, gdzie: $A = (3, 1)$, $B = (5, 2)$, $C = (6, 3)$.

Zadanie 2.9. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (5, 3)$ oraz $B = (-1, 2)$.

Zadanie 2.10. Sprawdź, czy punkty $A = (2, 3)$, $B = (3, -1)$ i $C = (4, 2)$ są współliniowe.

Zadanie 2.11. Oblicz współrzędne rzutu prostokątnego punktu $A = (-6, 2)$ na prostą k o równaniu $3x + 2y + 1 = 0$.

Zadanie 2.12. Oblicz współrzędne punktu B symetrycznego do punktu $A = (2, 3)$ względem prostej k o równaniu $3x - 5y - 8 = 0$.

Zadanie 2.13. Oblicz odległość punktu $A = (3, -3)$ od prostej k o równaniu $x + 2y = 7$.

Zadanie 2.14. Wyznacz równania dwusiecznych kątów utworzonych przez proste k i l o równaniach odpowiednio $x - 8y + 19 = 0$ i $4x + 7y - 2 = 0$.

Zadanie 2.15. Oblicz pole trójkąta $\triangle ABC$, którego wierzchołki mają współrzędne: $A = (-2, 2)$, $B = (5, -3)$, $C = (6, 6)$.

Zadanie 2.16. Wyznacz równanie okręgu o promieniu $r = 5$ i stycznego w punkcie $A = (2, -1)$ do prostej k o równaniu $3x + 4y - 2 = 0$. Ile jest takich okręgów?

Zadanie 2.17. Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (5, -2)$ i stycznego do prostej k o równaniu $4x + y = 1$.

Zadanie 2.18. Znajdź równania stycznych poprowadzonych z punktu $A = (-16, -2)$ do okręgu o równaniu $(x - 9)^2 + (y - 3)^2 = 65$.

Zadanie 2.19. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-7, 2)$ oraz $B = (14, 23)$ i stycznego do prostej k o równaniu $x-2y = 8$. Ile jest takich okręgów?

Zadanie 2.20. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (8, 7)$ i stycznego do prostych k i l o równaniach odpowiednio $x + y = -5$ i $x - 7y = -61$. Ile jest takich okręgów?

Zadanie 2.21. Znajdź współrzędne wierzchołków trójkąta, którego boki są odcinkami prostych o równaniach $6x - 5y = -7$, $3x + y = 14$ oraz $3x + 8y = -14$. Sprawdź, czy ten trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny:

Zadanie 2.22. Znajdź współrzędne wierzchołków trójkąta, którego środki boków mają współrzędne: $(-1, 1)$, $(3, 2)$ i $(1, -2)$.

Zadanie 2.23. Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka równoległoboku, jeśli trzy pozostałe wierzchołki mają współrzędne: $(1, 2)$, $(3, -1)$ i $(5, 0)$.

Zadanie 2.24. Znajdź współrzędne trzeciego i czwartego wierzchołka kwadratu, jeśli dwa wierzchołki mają współrzędne: $(0, 5)$ i $(3, -1)$.

Zadanie 2.25. Sprawdź, czy odcinek AB przecina prostą k o równaniu $2x+3y-7 = 0$, gdzie: $A = (1, -1)$ i $B = (3, 2)$.

Zadanie 2.26. Sprawdź, czy odcinki AB i CD przecinają się, gdzie: $A = (-4, -1)$, $B = (6, 3)$, $C = (5, 9)$, $D = (2, 1)$.

CZĘŚĆ III
ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 2.1. Wyznacz koniec B odcinka AB, gdy dane są: początek $A = (-3, 2)$ i środek $S = (5, 1)$ tego odcinka.

Rozwiązanie. Niech $B = (x, y)$. Mamy wówczas dwa równania:

$$\frac{-3+x}{2} = 5, \quad \frac{2+y}{2} = 1,$$

skąd dostajemy $x = 13$ i $y = 0$. Zatem $B = (13, 0)$.

Zadanie 2.2. Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie $S = (2, 3)$ i promieniu $r = 5$.

Rozwiązanie. Tym równaniem jest

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

lub w postaci rozwiniętej

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12.$$

Zadanie 2.3. Znajdź współrzędne środka i promień okręgu o równaniu

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$$

Rozwiązanie. Doprowadzamy lewą stronę równania do postaci kanonicznej:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 1 = (x+1)^2 + (y-2)^2 - 4,$$

skąd otrzymujemy równanie

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

Środkiem okręgu jest punkt $S = (-1, 2)$, promień okręgu jest równy $r = 2$.

Zadanie 2.4. Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB, którego końce mają współrzędne $A = (2, 4)$, $B = (-1, 3)$.

Rozwiązanie. Jeden sposób polega na wyznaczeniu równania prostej prostopadłej do wektora $\overrightarrow{BA} = [3, 1]$ i przechodzącej przez środek $S = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ odcinka AB (por. zadanie 2.7). Tu pokażemy drugi sposób. Punkt $P = (x, y)$ leży na symetralnej odcinka AB wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednakowo oddalony od końców odcinka. Równoważnie: punkt P leży na symetralnej odcinka AB, gdy kwadraty odległości P od A i B są równe. Stąd otrzymujemy równanie

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2,$$

które doprowadzamy do postaci

$$3x + y = 5.$$

Zadanie 2.5. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (4, 1)$ i prostopadłej do prostej o równaniu $2x - y + 3 = 0$.

Rozwiązanie. To równanie ma postać $x + 2y = d$ dla pewnego d. Liczbę d obliczamy podstawiając współrzędne punktu A do otrzymanego równania:

$$4 + 2 \cdot 1 = d,$$

czyli $d = 6$. Otrzymujemy równanie $x + 2y = 6$.

Zadanie 2.6. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A = (3, 5)$ i równoległej do prostej o równaniu $2x + y - 5 = 0$.

Rozwiązanie. Szukane równanie ma postać $2x + y = d$ dla pewnego d. Tak jak w poprzednim zadaniu, d obliczamy podstawiając współrzędne punktu A do otrzymanego równania. Ostatecznie otrzymamy równanie $2x + y = 11$.

Zadanie 2.7. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C, gdzie: $A = (2, 3)$, $B = (-1, 4)$, $C = (3, 1)$.

Rozwiązanie. Obliczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{BA}$, otrzymując $\overrightarrow{BA} = [3, -1]$. Równanie prostej prostopadłej do prostej AB ma zatem postać $3x - y = d$ dla pewnego d. Tę liczbę d obliczamy tak jak w poprzednich zadaniach, podstawiając współrzędne punktu C do otrzymanego równania. Ostatecznie dostajemy równanie $3x - y = 8$.

Zadanie 2.8. Wyznacz równanie prostej równoległej do prostej AB i przechodzącej przez punkt C, gdzie: $A = (3, 1)$, $B = (5, 2)$, $C = (6, 3)$.

Rozwiązanie. Zaczynamy od wyznaczenia wektora $\overrightarrow{AB}$, otrzymując $\overrightarrow{AB} = [2, 1]$. Bierzemy wektor $[1, -2]$ prostopadły do wektora $\overrightarrow{AB}$ i znajdujemy postać ogólną prostej prostopadłej do tego wektora: $x - 2y = d$. Znów obliczamy d podstawiając współrzędne punktu C do otrzymanego równania. W ten sposób otrzymujemy równanie $x - 2y = 0$.

Zadanie 2.9. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A = (5, 3)$ oraz $B = (-1, 2)$.

Rozwiązanie. Tym razem mamy $\overrightarrow{BA} = [6, 1]$. Wektorem prostopadłym do $\overrightarrow{AB}$ jest np. wektor $[1, -6]$. Prosta prostopadła do tego ostatniego wektora ma równanie postaci $x - 6y = d$ i obliczamy d podstawiając współrzędne punktu A (lub B). Otrzymujemy równanie $x - 6y = -13$.

Zadanie 2.10. Sprawdź, czy punkty $A = (2, 3)$, $B = (3, -1)$ i $C = (4, 2)$ są współliniowe.

Rozwiązanie. Tak jak w poprzednim zadaniu wyznaczamy równanie prostej AB. Dostajemy równanie $4x + y = 11$ i łatwo sprawdzamy, że współrzędne punktu C nie spełniają tego równania. Punkty A, B i C nie są zatem współliniowe.

Możemy też zauważyć, że punkty A, B i C są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ są równoległe. Jeśli

$$A = (x_A, y_A), \quad B = (x_B, y_B) \quad \text{oraz} \quad C = (x_C, y_C),$$

to

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A] \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{AC} = [x_C - x_A, y_C - y_A].$$

Punkty A, B i C są zatem współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (x_C - x_A)(y_B - y_A).$$

Zadanie 2.11. Oblicz współrzędne rzutu prostokątnego punktu $A = (-6, 2)$ na prostą k o równaniu $3x + 2y + 1 = 0$.

Rozwiązanie. Tak jak w zadaniu 2.5 wyznaczamy równanie prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A. Otrzymujemy równanie $2x - 3y = -18$. Rzut punktu A na prostą k jest punktem przecięcia tej prostopadłej z prostą k. Aby obliczyć współrzędne tego punktu przecięcia, rozwiązujemy układ równań liniowych

$$\begin{cases} 2x - 3y = -18 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$$

Otrzymujemy $x = -3$ i $y = 4$, a więc szukanym rzutem jest punkt $(-3, 4)$.

Zadanie 2.12. Oblicz współrzędne punktu B symetrycznego do punktu $A = (2, 3)$ względem prostej k o równaniu $3x - 5y - 8 = 0$.

Rozwiązanie. Niech $B = (x, y)$. Punkt B leży na prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A. Równanie tej prostopadłej wyznaczamy tak jak w poprzednim zadaniu, otrzymując $5x+3y = 19$. Ponadto środek odcinka AB leży na prostej k. Mamy zatem drugie równanie:

$$3 \cdot \frac{x + 2}{2} - 5 \cdot \frac{y + 3}{2} - 8 = 0.$$

Po rozwiązaniu układu równań, dostajemy $B = (5, -2)$.

Zadanie 2.13. Oblicz odległość punktu $A = (3, -3)$ od prostej k o równaniu $x+2y = 7$.

Rozwiązanie. Tak jak w zadaniu 2.11 obliczamy współrzędne rzutu punktu A na prostą k. Otrzymujemy punkt $B = (5, 1)$. Teraz wystarczy obliczyć odległość punktów A i B:

$$AB^2 = (5 - 3)^2 + (1 + 3)^2 = 20,$$

czyli szukana odległość punktu A od prostej k wynosi $2\sqrt{5}$.

Wyprowadzimy teraz wzór na odległość punktu od prostej w ogólnym przypadku. Przypuśćmy, że dana jest prosta k o równaniu $ax+by+c = 0$ i punkt $A = (x_0, y_0)$. Najpierw znajdujemy równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A. Otrzymamy równanie $bx - ay = bx_0 - ay_0$. Następnie rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} bx - ay = bx_0 - ay_0 \\ ax + by = -c \end{cases}$$

Otrzymujemy współrzędne punktu B, będącego rzutem prostokątnym punktu A na prostą k:

$$B = \left(\frac{bx_0^2 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_0 + a^2 y_0 - bc}{a^2 + b^2} \right).$$

Następnie obliczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \left[\frac{b^2 x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2} - x_0, \frac{-abx_0 + a^2 y_0 - bc}{a^2 + b^2} - y_0 \right] = \\
&= \left[\frac{b^2 x_0 - aby_0 - ac - a^2 x_0 - b^2 x_0}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_0 + a^2 y_0 - bc - a^2 y_0 - b^2 y_0}{a^2 + b^2} \right] = \\
&= \left[\frac{-aby_0 - ac - a^2 x_0}{a^2 + b^2}, \frac{-abx_0 - bc - b^2 y_0}{a^2 + b^2} \right] = \\
&= \left[-\frac{a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}, -\frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2} \right] = \\
&= -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \cdot [a, b].
\end{aligned}$$

Wreszcie obliczamy długość wektora $\overrightarrow{AB}$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Długość wektora $\overrightarrow{AB}$ jest właśnie szukaną odległością punktu A od prostej k. Zatem ta odległość jest równa

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Zadanie 2.14. Wyznacz równania dwusiecznych kątów utworzonych przez proste k i l o równaniach odpowiednio $x - 8y + 19 = 0$ i $4x + 7y - 2 = 0$.

Rozwiązanie. Skorzystamy ze wzoru wyprowadzonego w rozwiązaniu poprzedniego zadania. Punkt $P = (x, y)$ leży na dwusiecznej kąta, jeśli jest jednakowo oddalony od ramion tego kąta. Zatem równania dwusiecznych otrzymamy ze wzoru

$$\frac{|x - 8y + 19|}{\sqrt{1^2 + 8^2}} = \frac{|4x + 7y - 2|}{\sqrt{4^2 + 7^2}}.$$

Ponieważ $1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2 = 65$, więc to równanie upraszcza się do postaci

$$|x - 8y + 19| = |4x + 7y - 2|.$$

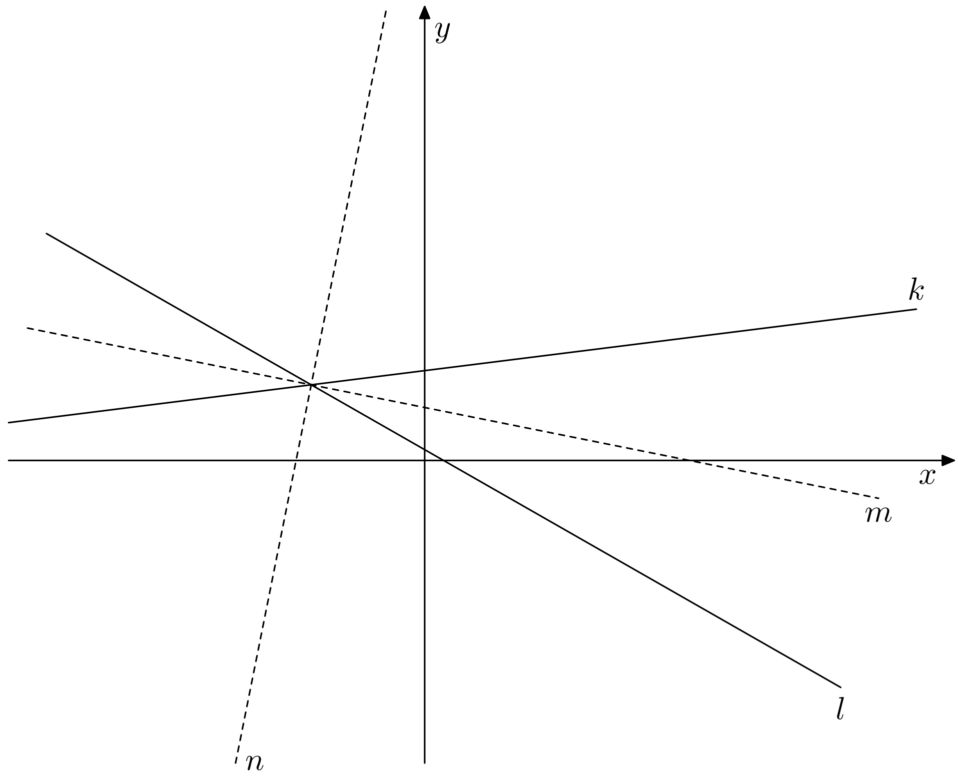
Otrzymujemy zatem równania dwu dwusiecznych. Dwusieczna m ma równanie:

$$x - 8y + 19 = 4x + 7y - 2, \quad \text{czyli} \quad x + 5y = 7$$

oraz dwusieczna n ma równanie:

$$x - 8y + 19 = -(4x + 7y - 2), \quad \text{czyli} \quad 5x - y = -17.$$

Dwusieczne te widzimy na rysunku:



Zwróćmy tu uwagę na to, że otrzymujemy równania obu dwusiecznych. Gdybyśmy więc chcieli wyznaczyć np. równanie dwusiecznej kąta w trójkącie, to w ten sposób otrzymalibyśmy dwa równania: równanie interesującej nas prostej zawierającej dwusieczną kąta wewnętrznego oraz równanie prostej zawierającej dwusieczne kątów zewnętrznych przyległych do naszego kąta wewnętrznego. Wybranie właściwej dwusiecznej wymagałoby dodatkowych obliczeń (np. rozstrzygnięcia, która prosta przecina przeciwległy bok – tak jak w zadaniu 2.25). Te dodatkowe trudności powodują, że zadania, w których mamy do czynienia z dwusiecznymi kątów często wymagają szczególnego potraktowania. Jednym z pomysłów stosowanych w takich zadaniach jest wybór dwusiecznej jako osi Ox; ramiona kąta są symetryczne względem tej osi i mają następujące równania kierunkowe:

$$y = kx, \quad y = -kx$$

dla pewnej liczby rzeczywistej k.

Zadanie 2.15. Oblicz pole trójkąta $\triangle ABC$, którego wierzchołki mają współrzędne: $A = (-2, 2)$, $B = (5, -3)$, $C = (6, 6)$.

Rozwiązanie. Jeden sposób rozwiązania polega na obliczeniu odległości wierzchołka C od prostej AB. Ta odległość jest długością wysokości opuszczonej z tego wierzchołka na bok AB (lub jego przedłużenie). Jeśli tę odległość oznaczymy literą d, to otrzymamy wzór

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot d.$$

W naszym zadaniu mamy

$$\overrightarrow{AB} = [7, -5], \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{74}.$$

Następnie tak jak w zadaniu 2.9 wyznaczamy równanie prostej AB, otrzymując

$$5x + 7y = 4.$$

Teraz korzystamy ze wzoru wyprowadzonego w zadaniu 2.13:

$$d = \frac{|5 \cdot 6 + 7 \cdot 6 - 4|}{\sqrt{\frac{5^2}{7^2}}} = \frac{68}{\sqrt{74}}.$$

Ostatecznie

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{74} \cdot \frac{68}{\sqrt{74}} = 34.$$

Za pomocą tej metody możemy wyprowadzić wzór ogólny na pole trójkąta. Niech

$$A = (x_A, y_A), \quad B = (x_B, y_B), \quad C = (x_C, y_C).$$

Wówczas

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A].$$

Równanie prostej AB ma postać

$$(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y = (y_B - y_A)x_A - (x_B - x_A)y_A,$$

czyli

$$(y_B - y_A)(x - x_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0.$$

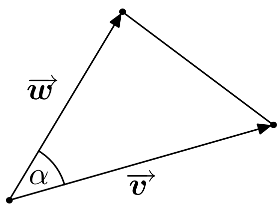
Mamy zatem

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot d = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \cdot \frac{|(y_B - y_A)(x_C - x_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)|}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot |(y_B - y_A)(x_C - x_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A)|. \end{aligned}$$

Popatrzmy na inny sposób wyprowadzenia tego wzoru. Przypuśćmy, że mamy dane dwa wektory

$$\vec{v} = [a, b] \quad \text{oraz} \quad \vec{w} = [c, d]$$

i zaczepiamy je w jednym punkcie. Niech α będzie kątem utworzonym przez te wektory.



Pole trójkąta utworzonego przez te wektory wyraża się wzorem

$$P = \frac{1}{2} \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin\alpha.$$

Przypomnijmy wzór

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{w})^2}{|\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2} &= \frac{|\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2}{|\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2} = \\
&= \frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2}{|\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2} = \\
&= \frac{(a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2) - (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2)}{|\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2} = \\
&= \frac{a^2d^2 + b^2d^2 - 2abcd}{|\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2} = \frac{(ad-bc)^2}{|\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2}.
\end{aligned}$$

Stąd dostajemy

$$\sin\alpha = \frac{|ad-bc|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|},$$

gdyż $\sin\alpha \geq 0$. Pole trójkąta jest zatem równe

$$P = \frac{1}{2} \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \frac{|ad-bc|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{1}{2} \cdot |ad-bc|.$$

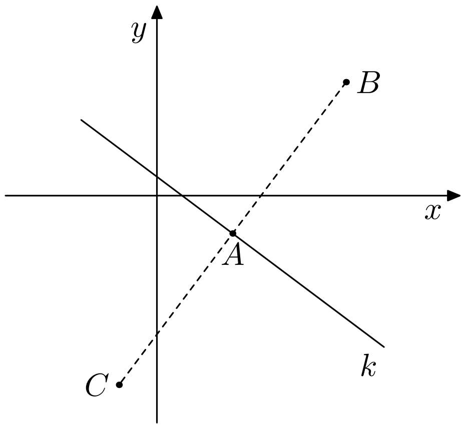
Wielkość $ad - bc$ już znamy z warunku równoległości wektorów. Zatem wektory są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy pole utworzonego przez nie „trójkąta” jest równe 0.

Powracając do naszego zadania, obliczamy:

$$\overrightarrow{AB} = [7, -5], \quad \overrightarrow{AC} = [8, 4], \quad P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |7 \cdot 4 - 8 \cdot (-5)| = 34.$$

Zadanie 2.16. Wyznacz równanie okręgu o promieniu $r = 5$ i stycznego w punkcie $A = (2, -1)$ do prostej k o równaniu $3x + 4y - 2 = 0$. Ile jest takich okręgów?

Rozwiązanie. Środek szukanego okręgu leży na prostej prostopadłej do prostej k w odległości 5 od punktu A. Są dwa takie punkty; na poniższym rysunku oznaczone literami B i C:



Równanie prostej prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt A ma postać

$$4x - 3y = 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-1),$$

czyli

$$4x - 3y = 11.$$

Mamy zatem układ równań

$$\begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $y = \frac{4x-11}{3}$, podstawiamy do drugiego równania i przekształcamy otrzymane równanie:

$$(x-2)^2 + \left(\frac{4x-11}{3} + 1\right)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 + \left(\frac{4x-11+3}{3}\right)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 + \left(\frac{4x-8}{3}\right)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 + \left(\frac{4(x-2)}{3}\right)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 + \frac{16}{9} \cdot (x-2)^2 = 25,$$

$$\frac{25}{9} \cdot (x-2)^2 = 25,$$

$$(x-2)^2 = 9.$$

Stąd łatwo dostajemy $x = 5$ lub $x = -1$. Mamy zatem dwa możliwe środki okręgów:

$$B = (5, 3), \quad C = (-1, -5).$$

Mamy zatem dwa możliwe równania okręgów:

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

oraz

$$(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 25.$$

Zadanie 2.17. Wyznacz równanie okręgu o środku w punkcie $S = (5, -2)$ i stycznego do prostej k o równaniu $4x + y = 1$.

Rozwiązanie. Promień r tego okręgu jest równy odległości punktu S od prostej k:

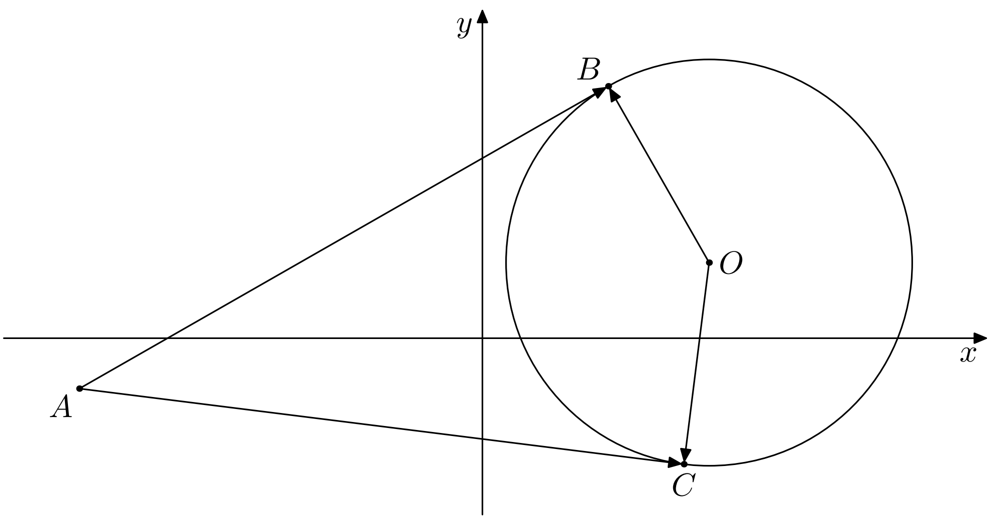
$$r = \frac{|4 \cdot 5 + (-2) - 1|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}.$$

Równanie okręgu ma zatem postać

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 17.$$

Zadanie 2.18. Znajdź równania stycznych poprowadzonych z punktu $A = (-16, -2)$ do okręgu o równaniu $(x - 9)^2 + (y - 3)^2 = 65$.

Rozwiązanie. Nasz okrąg ma środek w punkcie $O = (9, 3)$ i ma promień $\sqrt{65}$. Przypuśćmy, że $B = (x, y)$ jest jednym z szukanych punktów (są dwa takie punkty; na poniższym rysunku są to B i C). Ponieważ styczna jest prostopadła do promienia okręgu poprowadzonego do punktu styczności, więc wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{OB}$ są prostopadłe.



Mamy zatem $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, czyli

$$[x+16, y+2] \cdot [x-9, y-3] = 0.$$

To daje nam jedno równanie

$$(x+16)(x-9) + (y+2)(y-3) = 0,$$

czyli po uproszczeniu

$$x^2 + y^2 + 7x - y = 150.$$

Drugim równaniem jest równanie okręgu:

$$x^2 + y^2 - 18x - 6y = -25.$$

Mamy zatem układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 7x - y = 150 \\ x^2 + y^2 - 18x - 6y = -25 \end{cases}$$

Po odjęciu drugiego równania od pierwszego otrzymujemy równanie liniowe

$$25x + 5y = 175,$$

czyli

$$5x + y = 35.$$

Z tego równania wyznaczamy $y = 35 - 5x$ i po podstawieniu do równania okręgu, otrzymujemy

$$(x-9)^2 + (32-5x)^2 = 65.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie kwadratowe

$$x^2 - 13x + 40 = 0.$$

Ma ono dwa rozwiązania: $x = 5$ lub $x = 8$. Stąd dostajemy dwa punkty styczności

$$B = (5, 10), \quad C = (8, -5).$$

Równania stycznych znajdujemy teraz tak jak w zadaniu 2.9, otrzymując

$$4x - 7y + 50 = 0 \quad \text{oraz} \quad x + 8y + 32 = 0.$$

Zadanie 2.19. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-7, 2)$ oraz $B = (14, 23)$ i stycznego do prostej k o równaniu $x - 2y = 8$. Ile jest takich okręgów?

Rozwiązanie. Najpierw zauważamy, że środek $O = (x, y)$ szukanego okręgu leży na symetralnej odcinka AB. Wyznaczymy równanie tej symetralnej metodą opisaną w rozwiązaniu zadania 2.4. Otrzymujemy

$$(x-7)^2 + (y-2)^2 = (x-14)^2 + (y-23)^2.$$

Po uproszczeniu dostajemy równanie $x + 3y = 48$. Następnie zauważamy, że odległość punktu O od prostej k jest równa odległości O od punktu A. To daje nam równanie

$$\frac{|x-2y-8|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2},$$

czyli

$$\frac{(x-2y-8)^2}{5} = (x-7)^2 + (y-2)^2.$$

Po podstawieniu $x = 48 - 3y$, otrzymamy równanie

$$\frac{(48-3y-2y-8)^2}{5} = (41-y)^2 + (y-2)^2.$$

To równanie doprowadzamy do równania kwadratowego

$$y^2 - 34y + 273 = 0,$$

które ma dwa rozwiązania: $y = 13$ lub $y = 21$. Te rozwiązania dają dwa możliwe środki szukanych okręgów:

$$O = (9, 13) \quad \text{oraz} \quad P = (-15, 21).$$

Obliczamy następnie

$$|OA| = \sqrt{22^2 + 19^2} = \sqrt{845}$$

oraz

$$|PA| = \sqrt{2^2 + 11^2} = \sqrt{125}.$$

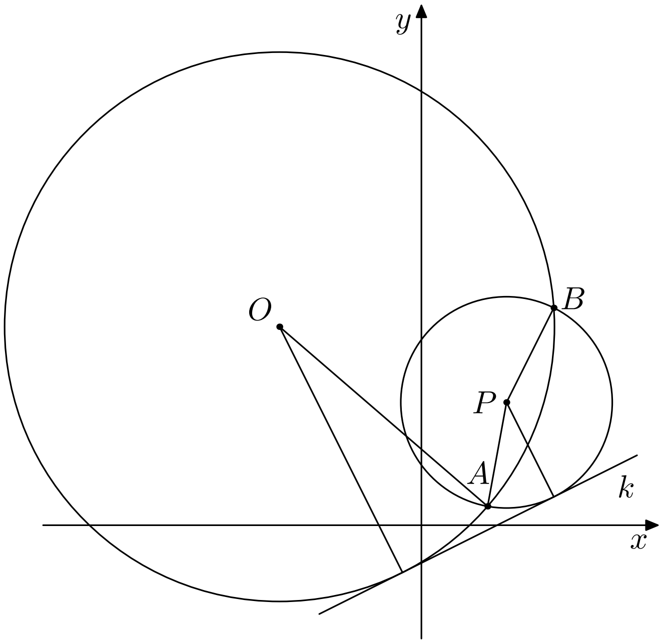
Teraz możemy już zapisać równania obu okręgów:

$$(x+15)^2 + (y-21)^2 = 845$$

oraz

$$(x-9)^2 + (y-13)^2 = 125.$$

Oba te okręgi zostały narysowane na poniższym rysunku:



Zadanie 2.20. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A = (8, 7)$ i stycznego do prostych k i l o równaniach odpowiednio $x + y = -5$ i $x - 7y = -61$. Ile jest takich okręgów?

Rozwiązanie. Środek $O = (x, y)$ szukanego okręgu leży na dwusiecznej kąta wyznaczonego przez proste k i l. Równania obu dwusiecznych kątów utworzonych przez te proste wyznaczamy tak jak w zadaniu 2.14. Mamy równanie

$$\frac{|x + y + 5|}{\sqrt{2}} = \frac{|x - 7y + 61|}{\sqrt{50}}.$$

Mnożymy obie strony tego równania przez $\sqrt{50}$, otrzymując

$$5 \cdot |x + y + 5| = |x - 7y + 61|.$$

Mamy teraz dwa przypadki. Równanie pierwszej dwusiecznej ma postać

$$5(x + y + 5) = x - 7y + 61,$$

czyli po uproszczeniu $x + 3y = 9$. Równanie drugiej dwusiecznej ma postać

$$5(x + y + 5) = -x + 7y - 61,$$

czyli $3x - y = -43$.

Zauważamy następnie, że odległość punktu O od prostej k jest równa odległości punktów O i A. To daje drugie równanie:

$$\frac{|x+y+5|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-8)^2+(y-7)^2},$$

czyli

$$\frac{(x+y+5)^2}{2} = (x-8)^2+(y-7)^2.$$

Znów rozpatrujemy dwa przypadki. W pierwszym wyznaczamy x z równania pierwszej dwusiecznej: $x = 9-3y$. Tę wartość x podstawiamy do otrzymanego przed chwilą równania:

$$\frac{(9-3y+y+5)^2}{2} = (9-3y-8)^2+(y-7)^2.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie kwadratowe

$$y^2+y-6=0.$$

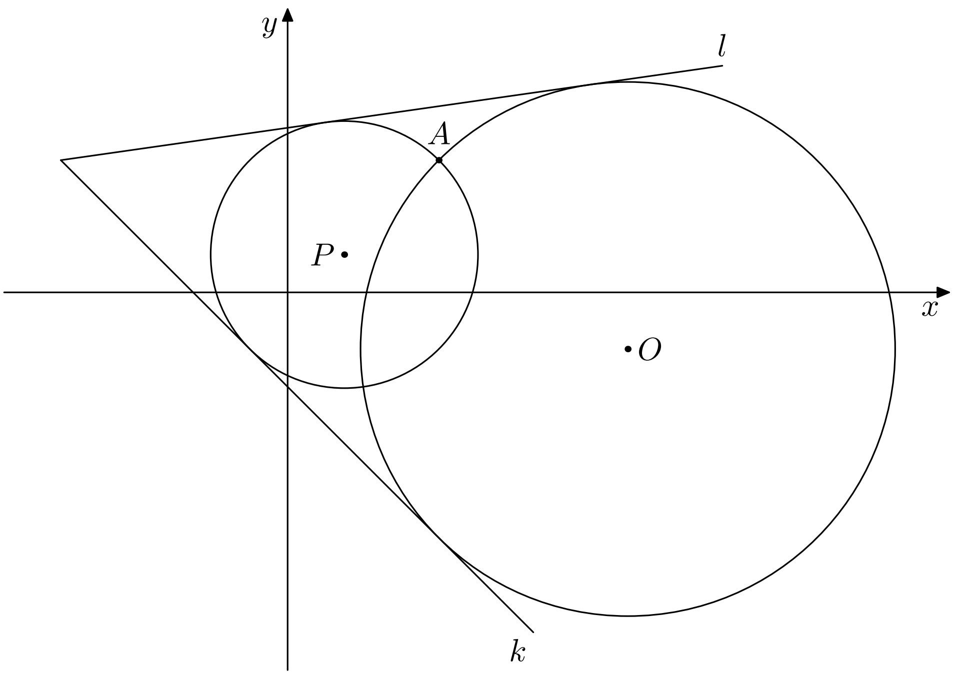
Ma ono dwa rozwiązania: $y=-3$ lub $y=2$ i w ten sposób otrzymujemy dwa możliwe środki okręgów:

$$O=(18,-3) \quad \text{oraz} \quad P=(3,2).$$

Równania obu okręgów mają postać:

$$(x-18)^2+(y+3)^2=200 \quad \text{oraz} \quad (x-3)^2+(y-2)^2=50.$$

Okręgi te zostały narysowane na poniższym rysunku:



W drugim przypadku wyznaczamy y z równania drugiej dwusiecznej: $y = 3x + 43$. Po podstawieniu tej wartości y do równania

$$\frac{(x+y+5)^2}{2} = (x-8)^2 + (y-7)^2$$

otrzymujemy równanie

$$\frac{(x+3x+43+5)^2}{2} = (x-8)^2 + (3x+43-7)^2.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie sprzeczne. Zadanie ma zatem dwa znalezione wcześniej rozwiązania.

Zadanie 2.21. Znajdź współrzędne wierzchołków trójkąta, którego boki są odcinkami prostych o równaniach $3x + 8y = -14$, $6x - 5y = -7$ oraz $3x + y = 14$. Sprawdź, czy ten trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny:

Rozwiązanie. Współrzędne wierzchołków trójkąta obliczamy rozwiązując trzy układy równań:

$$\begin{cases} 3x + y = 14 \\ 6x - 5y = -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x - 5y = -7 \\ 3x + y = 14 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y = 14 \\ 3x + 8y = -14 \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$A = (-2,-1), \quad B = (3,5), \quad C = (6,-4).$$

Następnie obliczamy

$$|AB|^2 = 61, \quad |BC|^2 = 90, \quad |AC|^2 = 73.$$

Wynika stąd, że bok BC jest najdłuższy. Ponieważ $|BC|^2 < |AB|^2 + |AC|^2$, więc z twierdzenia cosinusów łatwo wynika, że kąt A jest ostry; zatem trójkąt ABC jest ostrokątny. Inny sposób rozstrzygnięcia, czy kąty trójkąta są ostre, polega na zastosowaniu iloczynu skalarnego. Na przykład,

$$\overrightarrow{AB} = [5,6], \quad \overrightarrow{AC} = [8,-3],$$

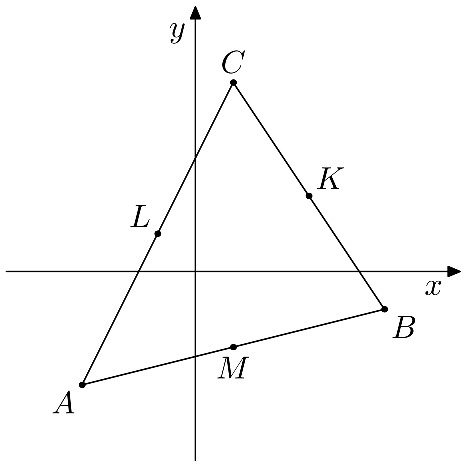
skąd dostajemy

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \cdot 8 - 6 \cdot 3 = 22 > 0,$$

a więc kąt A jest ostry.

Zadanie 2.22. Znajdź współrzędne wierzchołków trójkąta, którego środki boków mają współrzędne: $(3,2)$, $(-1,1)$ i $(1,-2)$.

Rozwiązanie. Niech $K = (3, 2)$, $L = (-1, 1)$ i $M = (1, -2)$ będą środkami boków BC, AC i AB trójkąta ABC.



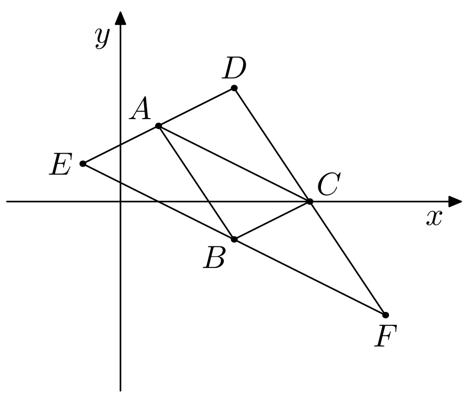
Wówczas

$$A = M + \overrightarrow{KL} = (1, -2) + [-4, -1] = (-3, -3),$$
$$B = M + \overrightarrow{LK} = (1, -2) + [4, 1] = (5, -1),$$
$$C = K + \overrightarrow{ML} = (3, 2) + [-2, 3] = (1, 5).$$

Można również zauważyć, że np. proste AB i KL są równoległe, i w ten sposób wyznaczyć równanie prostej AB. W podobny sposób wyznaczamy równania prostych zawierających pozostałe boki. Po rozwiązaniu trzech układów równań, dostajemy współrzędne wierzchołków. Metoda wektorowa jest zdecydowanie prostsza.

Zadanie 2.23. Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka równoległoboku, jeśli trzy pozostałe wierzchołki mają współrzędne: $(1, 2)$, $(3, -1)$ i $(5, 0)$.

Rozwiązanie. Niech $A = (1, 2)$, $B = (3, -1)$ i $C = (5, 0)$. Istnieją trzy rozwiązania. Są nimi punkty D, E i F.

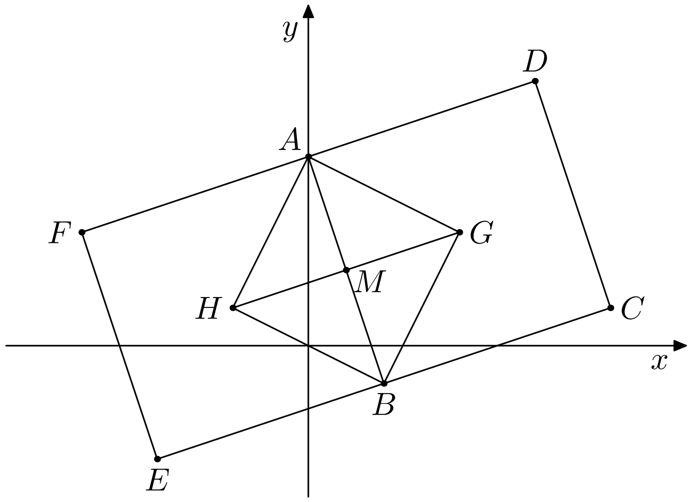


Otrzymujemy trzy równoległoboki: $ABCD$, $AEBC$ i $ABFC$. Współrzędne punktów D, E i F obliczamy tak jak w poprzednim zadaniu:

$$D = A + \overrightarrow{BC} = (1, 2) + [2, 1] = (3, 3),$$
$$E = A + \overrightarrow{CB} = (1, 2) + [-2, -1] = (-1, 1),$$
$$F = B + \overrightarrow{AC} = (3, -1) + [4, -2] = (7, -3).$$

Zadanie 2.24. Znajdź współrzędne trzeciego i czwartego wierzchołka kwadratu, jeśli dwa wierzchołki mają współrzędne: $(0,5)$ i $(3,-1)$.

Rozwiązanie. Niech $A = (0,5)$ i $B = (3,-1)$. Mamy dwa przypadki. W pierwszym punkty A i B są kolejnymi wierzchołkami kwadratu (czyli są końcami jednego boku). Mamy wtedy dwa rozwiązania; szukanymi wierzchołkami są C i D (i mamy kwadrat $ABCD$) lub E i F (i tym razem mamy kwadrat $ABEF$). W drugim punkty A i B są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu (czyli są końcami przekątnej). Wtedy mamy kwadrat $AHBG$.



Obliczanie współrzędnych szukanych punktów rozpoczynamy od wyznaczenia wektora $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = [2-0, -1-5] = [2,-6].$$

Następnie zauważamy, że wektor $\overrightarrow{AD}$ powstaje przez obrót wektora $\overrightarrow{AB}$ o 90° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara; zatem $\overrightarrow{AD} = [6,2]$. Podobnie wektor $\overrightarrow{AF}$ powstaje z wektora $\overrightarrow{AB}$ przez obrót o 90° zgodniem z ruchem wskazówek zegara; zatem $\overrightarrow{AF} = [-6,-2]$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} D &= A + \overrightarrow{AD} = (0,5) + [6,2] = (6,7),\\ F &= A + \overrightarrow{AF} = (0,5) + [-6,-2] = (-6,3),\\ C &= B + \overrightarrow{AD} = (2,-1) + [6,2] = (2,-1),\\ E &= B + \overrightarrow{AF} = (2,-1) + [-6,-2] = (-4,-3). \end{aligned}$$

Wreszcie zauważamy, że punkty G i H są środkami odcinków AC i AE; stąd $G = (4,3)$ oraz $H = (-2,1)$.

Współrzędne wierzchołków G i H można też obliczyć inaczej. Niech M będzie środkiem odcinka AB. Wtedy wektory $\overrightarrow{MG}$ i $\overrightarrow{MH}$ powstają przez obrót wektorów $\overrightarrow{MB}$ i $\overrightarrow{MA}$ o 90° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Stąd dostajemy

$$G = M + \overrightarrow{MG} \quad \text{oraz} \quad H = M + \overrightarrow{MH}.$$

Zadanie 2.25. Sprawdź, czy odcinek AB przecina prostą k o równaniu $2x+3y-7=0$, gdzie: $A = (1,-1)$ i $B = (3,2)$.

Rozwiązanie. Ponieważ $\overrightarrow{AB} = [2,3]$, więc punkty prostej AB są opisane równaniami parametrycznymi

$$A + t \cdot \overrightarrow{AB} = (1,-1) + t \cdot [2,3] = (2t+1, 3t-1).$$

Sprawdzamy, dla jakiej wartości parametru t punkt prostej AB leży na prostej k. W tym celu współrzędne punktu $(2t+1, 3t-1)$ podstawiamy do równania prostej k:

$$2(2t+1) + 3(3t-1) + 7 = 0,$$

czyli $13t = -6$. To równanie ma rozwiązanie $t = -\frac{6}{13}$. Ponieważ $t < 0$, więc punkt przecięcia nie leży wewnątrz odcinka AB; leży na półprostej BA poza punktem A.

Zadanie 2.26. Sprawdź, czy odcinki AB i CD przecinają się, gdzie: $A = (-4,-1)$, $B = (6,3)$, $C = (5,9)$, $D = (2,1)$.

Rozwiązanie. Ponieważ $\overrightarrow{AB} = [10,4]$ oraz $\overrightarrow{CD} = [-3,-8]$, więc punkty prostych AB i CD są opisywane równaniami parametrycznymi:

$$A + t \cdot \overrightarrow{AB} = (-4,-1) + t \cdot [10,4] = (10t-4, 4t-1)$$

oraz

$$C + s \cdot \overrightarrow{CD} = (5,9) + s \cdot [-3,-8] = (-3s+5, -8s+9),$$

gdzie t i s są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Sprawdzamy, dla jakich wartości t i s te punkty się pokrywają. Mamy wówczas

$$(10t-4, 4t-1) = (-3s+5, -8s+9),$$

czyli

$$\begin{cases} 10t - 4 = -3s + 5 \\ 4t - 1 = -8s + 9 \end{cases}$$

Ten układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie: $t = \frac{21}{34}$ i $s = \frac{16}{17}$. Zatem punkt o współrzędnych

$$\left(10 \cdot \frac{21}{34} - 4, 4 \cdot \frac{21}{34} - 1\right) = \left(\frac{37}{17}, \frac{25}{17}\right)$$

jest punktem wspólnym prostych AB i CD. Ponieważ $0 < t < 1$ oraz $0 < s < 1$, więc ten punkt przecięcia leży wewnątrz obu odcinków.

Jeśli punkt przecięcia oznaczymy literą P, to $\overrightarrow{AP} = \frac{21}{34} \cdot \overrightarrow{AB}$, skąd wynika, że punkt P dzieli odcinek AB w stosunku $21 : 13$. podobnie możemy stwierdzić, że punkt P dzieli odcinek CD w stosunku $16 : 1$.

CZĘŚĆ IV
PRZYPADKI SZCZEGÓLNE TWIERDZEŃ GEOMETRYCZNYCH

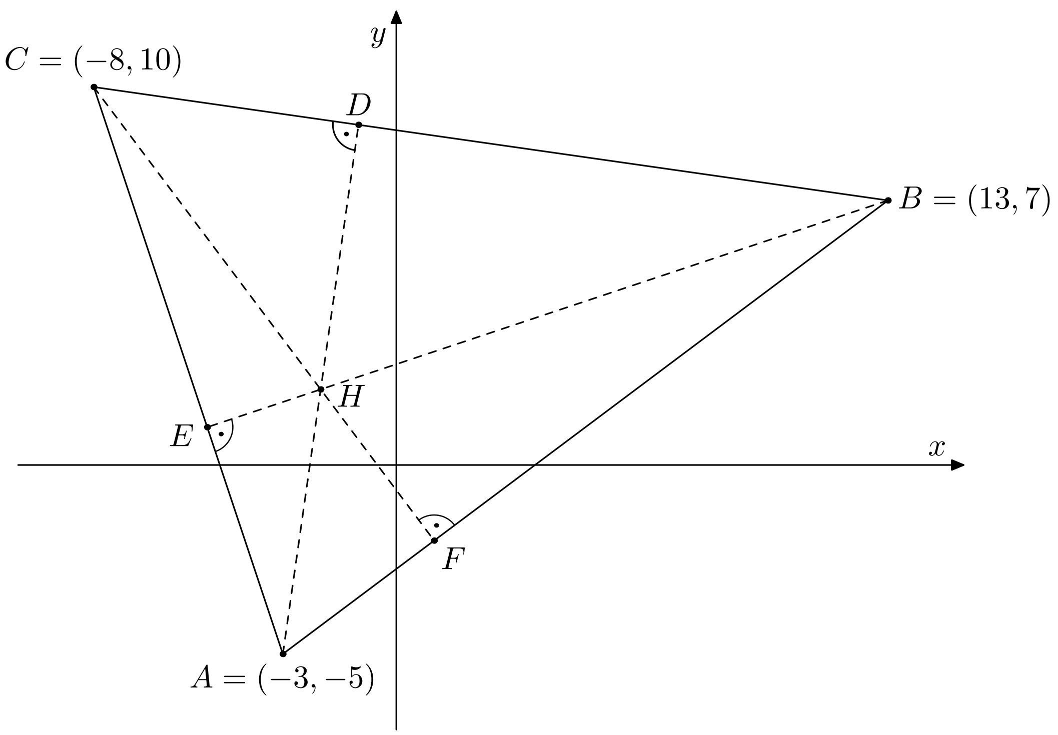
4.1. Ortocentrum trójkąta

Zadanie 4.1. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-3, -5)$, $B = (13, 7)$ oraz $C = (-8, 10)$. Punkty D, E i F są odpowiednio rzutami wierzchołków A, B i C trójkąta na proste zawierające przeciwległe boki. Punkt H jest punktem przecięcia prostych AD i BE.

1. Wyznacz równania prostych AD, BE i CF.
2. Oblicz współrzędne punktów D, E i F.
3. Oblicz współrzędne punktu H.
4. Sprawdź, że punkt H leży na prostej CF.

Uwaga. Zadanie to jest szczególnym przypadkiem twierdzenia mówiącego, że proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt nazywamy **ortocentrum trójkąta**. To twierdzenie udowodnimy w następnej części.

Rozwiązanie.



1. Wyznaczymy najpierw równanie prostej AD. Ta prosta jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{BC}$. Ponieważ

$$\overrightarrow{BC} = [-8 - 13, 10 - 7] = [-21, 3] = (-3) \cdot [7, -1],$$

więc równanie prostej AD ma postać $7x - y = c$ dla pewnego c. Liczbę c wyznaczamy podstawiając do równania współrzędne punktu A:

$$c = 7 \cdot (-3) - (-5) = -21 + 5 = -16.$$

Prosta AD ma zatem równanie $7x - y = -16$.

Podobnie prosta BE jest prostopadła do wektora

$$\overrightarrow{CA} = [-3 - (-8), -5 - 10] = [5, -15] = 5 \cdot [1, -3].$$

Ma zatem równanie postaci $x - 3y = c$. Liczbę c wyznaczamy podobnie; tym razem podstawiając współrzędne punktu B. Otrzymujemy

$$c = 13 - 3 \cdot 7 = -8.$$

Prosta BE ma zatem równanie $x - 3y = -8$.

Wreszcie prosta CF jest prostopadła do wektora

$$\overrightarrow{AB} = [13 - (-3), 7 - (-5)] = [16, 12] = 4 \cdot [4, 3].$$

Ma zatem równanie postaci $4x + 3y = c$. Liczbę c obliczamy w podobny sposób, otrzymując $c = -2$. Ostatecznie otrzymujemy równanie prostej CF: $4x + 3y = -2$.

2. Zaczynamy od wyznaczenia równania prostej BC. Jest ona prostopadła do prostej AD; ma zatem równanie postaci $x + 7y = d$ dla pewnego d. Liczbę d wyznaczamy podstawiając do otrzymanego równania współrzędne np. punktu B:

$$d = 13 + 7 \cdot 7 = 13 + 49 = 62.$$

Prosta BC ma zatem równanie $x + 7y = 62$.

Współrzędne punktu D obliczamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 7x - y = -16 \\ x + 7y = 62 \end{cases}$$

Otrzymujemy $D = (-1, 9)$.

Postępując w podobny sposób (szczegóły obliczeń znów pozostawiamy jako ćwiczenie), otrzymujemy

$$E = (-5, 1) \quad \text{oraz} \quad F = (1, -2).$$

3. Współrzędne punktu H otrzymujemy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 7x - y = -16 \\ x - 3y = -8 \end{cases}$$

(są to równania prostych AD i BE). Otrzymujemy $H = (-2, 2)$.

4. Podstawiamy współrzędne punktu H do równania prostej CF:

$$L = 4x + 3y = 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = -8 + 6 = -2 = P,$$

co dowodzi, że punkt H leży na prostej CF.

Wykazaliśmy zatem, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie (ortocentrum) $H = (-2, 2)$.

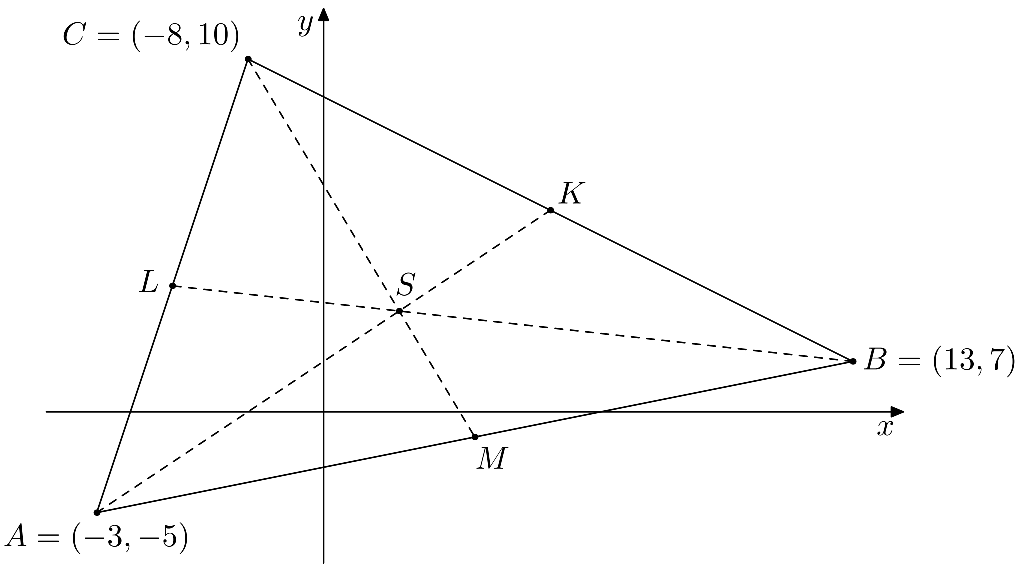
4.2. Środek ciężkości trójkąta

Zadanie 4.2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-9, -4)$, $B = (21, 2)$ oraz $C = (-3, 14)$. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB. Punkt S jest punktem przecięcia prostych AK i BL.

1. Wyznacz współrzędne punktów K, L i M.
2. Wyznacz równania prostych AK, BL i CM.
3. Wyznacz współrzędne punktu S.
4. Sprawdź, że punkt S leży na prostej CM.
5. Wykaż, że $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BL}$ oraz $\overrightarrow{CS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CM}$.

Uwaga. To zadanie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia mówiącego, że środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt nazywamy **środkiem ciężkości trójkąta**. Ponadto środek ciężkości dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1 (odcinek od wierzchołka do środka ciężkości jest dwa razy dłuższy od odcinka łączącego środek ciężkości ze środkiem boku). To twierdzenie udowodnimy w następnej części.

Rozwiązanie.



1. Współrzędnymi środka odcinka są średnie arytmetyczne współrzędnych końców tego odcinka:

$$K = \left(\frac{21 + (-3)}{2}, \frac{2 + 14}{2}\right) = (9, 8),$$

$$L = \left(\frac{-9 + (-3)}{2}, \frac{-4 + 14}{2}\right) = (-6, 5),$$

$$M = \left(\frac{-9 + 21}{2}, \frac{-4 + 2}{2}\right) = (6, -1).$$

2. Wyznaczamy najpierw równanie prostej AK. Mamy

$$\overrightarrow{AK} = [9-(-9), 8-(-4)] = [18, 12] = 6 \cdot [3, 2].$$

Zatem wektor $\vec{\boldsymbol{v}} = [2, -3]$ jest prostopadły do wektora $\overrightarrow{AK}$. Równanie prostej AK ma zatem postać

$$\vec{\boldsymbol{v}} \cdot [x-(-9), y-(-4)] = 0,$$

czyli

$$[2, -3] \cdot [x+9, y+4] = 0,$$

czyli

$$2x + 18 - 3y - 12 = 0.$$

Ostatecznie otrzymujemy równanie $2x - 3y = -6$.

W podobny sposób otrzymujemy równania dwóch pozostałych prostych:

$$\begin{aligned} BL: &\quad x + 9y = 39, \\ CM: &\quad 5x + 3y = 27. \end{aligned}$$

3. Współrzędne punktu S obliczamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x + 9y = 39 \end{cases}$$

Otrzymujemy $S = (3, 4)$.

4. Współrzędne punktu S podstawiamy do równania prostej CM:

$$L = 5x + 3y = 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 15 + 12 = 27 = P.$$

5. Mamy kolejno:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= [18, 12], \\ \overrightarrow{BL} &= [-27, 3], \\ \overrightarrow{CM} &= [9, -15], \\ \overrightarrow{AS} &= [12, 8] = \frac{2}{3} \cdot [18, 12] = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AK}, \\ \overrightarrow{BS} &= [-18, 2] = \frac{2}{3} \cdot [-27, 3] = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BL}, \\ \overrightarrow{CS} &= [6, -10] = \frac{2}{3} \cdot [9, -15] = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CM}. \end{aligned}$$

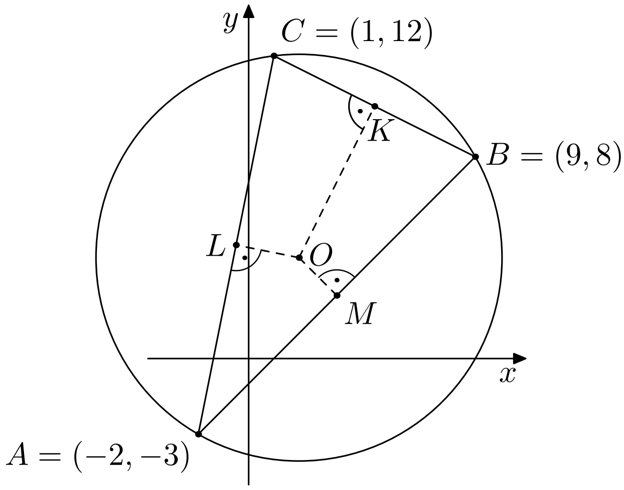
4.3. Okrąg opisany na trójkącie

Zadanie 4.3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-2,-3)$, $B = (9,8)$ oraz $C = (1,12)$. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB.

1. Wyznacz współrzędne punktów K, L i M.
2. Wyznacz równania symetralnych boków trójkąta ABC.
3. Punkt O jest punktem przecięcia symetralnych boków BC i AC. Oblicz współrzędne punktu O.
4. Sprawdź, że punkt O leży na symetralnej boku AB.
5. Oblicz odległości punktu O od wierzchołków trójkąta ABC.
6. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Uwaga. To zadanie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia mówiącego, że symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt jest jednakowo oddalony od wierzchołków trójkąta, jest zatem **środkiem okręgu opisanego** na trójkącie. To twierdzenie udowodnimy w następnej części.

Rozwiązanie.



1. Współrzędnymi środka odcinka są średnie arytmetyczne współrzędnych końców tego odcinka:

$$K = \left(\frac{9+1}{2}, \frac{8+12}{2}\right) = (5, 10),$$

$$L = \left(\frac{-2+1}{2}, \frac{-3+12}{2}\right) = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{9}{2}\right),$$

$$M = \left(\frac{-2+9}{2}, \frac{-3+8}{2}\right) = \left(\tfrac{7}{2}, \tfrac{5}{2}\right).$$

2. Wyznaczymy najpierw równanie symetralnej odcinka BC. Jest ona prostopadła do wektora $\overrightarrow{BC}$. Ponieważ

$$\overrightarrow{BC} = [-8, 4] = (-4) \cdot [2, -1],$$

więc równanie tej symetralnej ma postać $2x - y = c$ dla pewnego c. Liczbę c obliczymy podstawiając do tego równania współrzędne punktu K:

$$c = 2 \cdot 5 - 10 = 0.$$

Zatem równanie symetralnej odcinka BC ma postać $2x - y = 0$. Podobnie znajdujemy $\overrightarrow{AC} = [3, 15] = 3 \cdot [1, 5]$, więc równanie symetralnej odcinka AC ma postać $x + 5y = c$. Tym razem podstawiamy do równania współrzędne punktu L, otrzymując $c = 22$. Zatem równanie symetralnej odcinka AC ma postać $x + 5y = 22$. Wreszcie $\overrightarrow{AB} = [11, 11] = 11 \cdot [1, 1]$, czyli równanie symetralnej boku AB ma postać $x + y = c$. Podstawiając do tego równania współrzędne punktu M, otrzymujemy $c = 6$. Zatem równanie symetralnej odcinka AB ma postać $x + y = 6$.

3. Współrzędne punktu O obliczamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 5y = 22 \end{cases}$$

Otrzymujemy $O = (2, 4)$.

4. Sprawdzamy, że współrzędne punktu O spełniają równanie symetralnej boku AB:

$$L = x + y = 2 + 4 = 6 = P.$$

5. Obliczamy kwadraty odległości punktu O od wierzchołków trójkąta:

$$\begin{aligned} |OA|^2 &= (2+2)^2 + (4+3)^2 = 4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65, \\ |OB|^2 &= (2-9)^2 + (4-8)^2 = (-7)^2 + (-4)^2 = 49 + 16 = 65, \\ |OC|^2 &= (2-1)^2 + (4-12)^2 = 1^2 + (-8)^2 = 1 + 64 = 65. \end{aligned}$$

Zatem $|OA| = |OB| = |OC| = \sqrt{65}$.

6. Okrąg opisany na trójkącie ABC ma środek w punkcie $O = (2, 4)$ i promień równy $\sqrt{65}$. Równanie tego okręgu ma zatem postać

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 65.$$

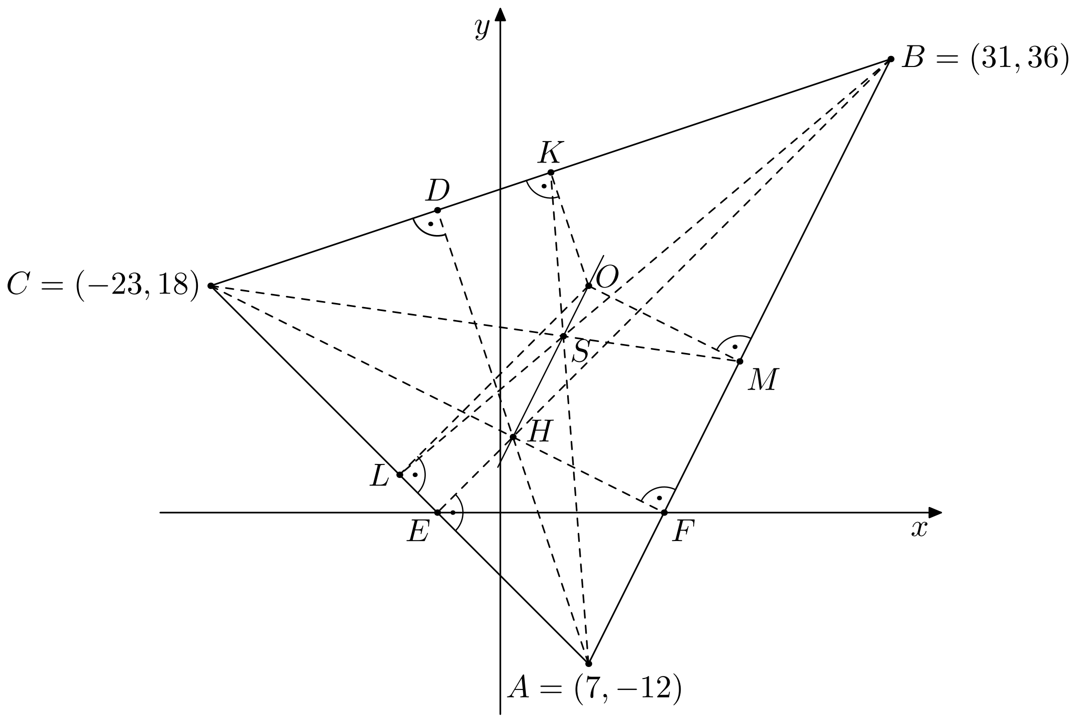
4.4. Prosta Eulera

Zadanie 4.4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (7, -12)$, $B = (31, 36)$ oraz $C = (-23, 18)$. Punkty D, E i F są rzutami wierzchołków A, B i C trójkąta na proste zawierające przeciwległe boki. Proste AD i BE przecinają się w punkcie H. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB. Proste AK i BL przecinają się w punkcie S. Symetralne boków BC i AC przecinają się w punkcie O.

1. Wyznacz równania prostych AD i BE.
2. Oblicz współrzędne punktu H.
3. Wyznacz równania prostych AK i BL.
4. Oblicz współrzędne punktu S.
5. Wyznacz równania symetralnych boków BC i AC.
6. Oblicz współrzędne punktu O.
7. Wyznacz równanie prostej OH.
8. Wykaż, że punkt S leży na prostej OH i dzieli odcinek OH wewnętrznie w stosunku $1 : 2$ (tzn. $2 \cdot |OS| = |SH|$).

Uwaga. To zadanie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia mówiącego, że w trójkącie ortocentrum H, środek ciężkości S i środek O okręgu opisanego są współliniowe oraz punkt S dzieli wewnętrznie odcinek OH w stosunku $1 : 2$ (tzn. $2 \cdot |OS| = |SH|$). Prostą OH nazywamy **prostą Eulera** dla trójkąta ABC. To twierdzenie udowodnimy w następnej części.

Rozwiązanie.



1. Zauważmy, że $\overrightarrow{BC} = [-54, 18] = (-18) \cdot [3, 1]$. Zatem prosta AD ma równanie postaci $3x + y = c$, gdzie c wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu A. Otrzymujemy równanie $3x+y = 9$. Następnie $\overrightarrow{AC} = [-30, 30] = (-30)\cdot[1, -1]$, więc prosta BE ma równanie postaci $x - y = c$. Tym razem obliczamy c podstawiając współrzędne punktu B. Otrzymujemy równanie $x - y = -5$.

2. Współrzędne punktu H znajdujemy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x - y = -5 \end{cases}$$

Otrzymujemy $H = (1, 6)$.

3. Najpierw obliczamy współrzędne punktów K i L:

$$K = \left(\frac{31 - 23}{2}, \frac{36 + 18}{2}\right) = (4, 27),$$
$$L = \left(\frac{7 - 23}{2}, \frac{-12 + 18}{2}\right) = (-8, 3).$$

Teraz $\overrightarrow{AK} = [-3, 39] = (-3) \cdot [1, -13]$. Zatem wektor $[13, 1]$ jest prostopadły do prostej AK. Stąd wynika, że równanie prostej AK ma postać $13x + y = c$. Wartość c obliczamy podstawiając do tego równania współrzędne punktu A; otrzymujemy $c = 79$. Zatem prosta AK ma równanie $13x + y = 79$.
Następnie $\overrightarrow{BL} = [-39, -33] = (-3) \cdot [13, 11]$, a więc wektor $[11, -13]$ jest prostopadły do prostej BL. Ta prosta ma zatem równanie postaci $11x - 13y = c$, przy czym c obliczamy podstawiając do tego równania współrzędne punktu B. Ostatecznie otrzymujemy równanie $11x - 13y = -127$.

4. Współrzędne punktu S otrzymujemy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 13x + y = 79 \\ 11x - 13y = -127 \end{cases}$$

Dostajemy $S = (5, 14)$.

5. Ponieważ $\overrightarrow{BC} = (-18) \cdot [3, 1]$, więc symetralna odcinka BC ma równanie postaci $3x + y = c$. Tym razem obliczamy c podstawiając do tego równania współrzędne punktu K. Otrzymujemy równanie $3x + y = 39$. Następnie $\overrightarrow{AC} = (-30) \cdot [1, -1]$, więc równanie symetralnej boku AC ma postać $x - y = c$. Wartość c obliczamy podstawiając do tego równania współrzędne punktu L; ostatecznie otrzymujemy równanie $x - y = -11$.

6. Współrzędne punktu O znajdujemy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 3x + y = 39 \\ x - y = -11 \end{cases}$$

Dostajemy $O = (7, 18)$.

7. Ponieważ $\overrightarrow{OH} = [-6, -12] = (-6) \cdot [1, 2]$, więc wektor $[2, -1]$ jest prostopadły do prostej OH. Ma ona zatem równanie postaci $2x - y = c$, przy czym c obliczamy podstawiając do tego równania współrzędne punktu O. Ostatecznie otrzymujemy równanie $2x - y = -4$.

8. Sprawdzamy, że współrzędne punktu S spełniają równanie prostej OH:

$$L = 2x - y = 2 \cdot 5 - 14 = 10 - 14 = -4 = P.$$

Wreszcie zauważmy, że

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HS} &= [4, 8] = 2 \cdot [2, 4], \\ \overrightarrow{SO} &= [2, 4]. \end{aligned}$$

Zatem

$$\overrightarrow{HS} = 2 \cdot \overrightarrow{SO},$$

co dowodzi, że punkt S dzieli (wewnętrznie) odcinek HO w stosunku $2 : 1$.

Uwaga. Oczywiście równość $\overrightarrow{HS} = 2 \cdot \overrightarrow{SO}$ dowodzi także, że punkty H, S i O są współliniowe.

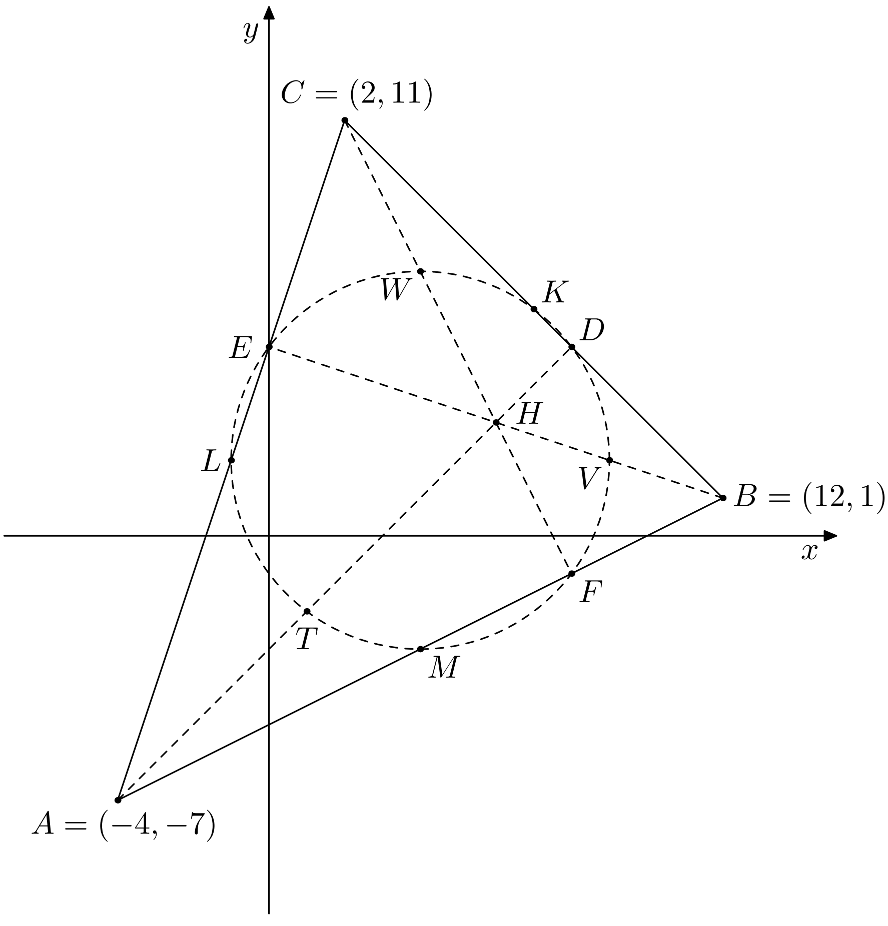
4.5. Okrąg dziewięciu punktów

Zadanie 4.5. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-4, -7)$, $B = (12, 1)$ oraz $C = (2, 11)$. Punkty D, E i F są rzutami wierzchołków A, B i C trójkąta na proste zwierające przeciwległe boki. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB. Punkty T, V i W są odpowiednio środkami odcinków AH, BH i CH.

1. Oblicz współrzędne punktów D, E i F.
2. Oblicz współrzędne punktu H.
3. Oblicz współrzędne punktów K, L i M.
4. Oblicz współrzędne punktów T, V i W.
5. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie DEF.
6. Wykaż, że punkty K, L, M, T, V i W leżą na okręgu opisanym na trójkącie DEF.

Uwaga. To zadanie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia mówiącego, że w trójkącie ABC rzuty wierzchołków na proste zawierające przeciwległe boki, środki boków i środki odcinków łączących wierzchołki z ortocentrum leżą na jednym okręgu. Ten okrąg nazywamy **okręgiem dziewięciu punktów** (lub **okręgiem Feuerbacha**) dla trójkąta ABC. To twierdzenie udowodnimy w następnej części.

Rozwiązanie.



1. Najpierw zauważamy, że $\overrightarrow{BC} = [-10, 10] = 10 \cdot [-1, 1]$. Stąd łatwo wynika, że prosta BC ma równanie $x+y = 13$ oraz że prosta AD ma równanie $x-y = 3$. Rozwiązując układ złożony z tych dwóch równań, otrzymujemy $D = (8, 5)$. W podobny sposób znajdujemy $E = (0, 5)$ i $F = (8, -1)$.
2. Wiemy już, że prosta AD ma równanie $x - y = 3$. W podobny sposób znajdujemy równanie prostej BE: $x + 3y = 15$. Z tych dwóch równań obliczamy współrzędne punktu $H = (6, 3)$.
3. Mamy $K = (\frac{12+2}{2}, \frac{1+11}{2}) = (7, 6)$ i podobnie $L = (-1, 2)$ oraz $M = (4, -3)$.
4. Tym razem $T = (\frac{-4+6}{2}, \frac{-7+3}{2}) = (1, -2)$ i podobnie $V = (9, 2)$ oraz $W = (4, 7)$.
5. Zauważamy, że punkty D i E leżą na prostej równoległej do osi Ox; symetralna odcinka DE ma zatem równanie $x = 4$. Podobnie symetralna odcinka DF ma równanie $y = 2$. Stąd wynika, że środkiem okręgu opisanego na trójkącie DEF jest punkt $P = (4, 2)$. Promień tego okręgu jest równy

   $$|PD| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

   Równanie okręgu opisanego na trójkącie DEF ma więc postać

   $$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

6. Sprawdzenie, że współrzędne wymienionych sześciu punktów spełniają otrzymane równanie okręgu, jest bardzo łatwe. Na przykład dla punktu T mamy

   $$(1 - 4)^2 + (-2 - 2)^2 = 3^2 + 4^2 = 25.$$

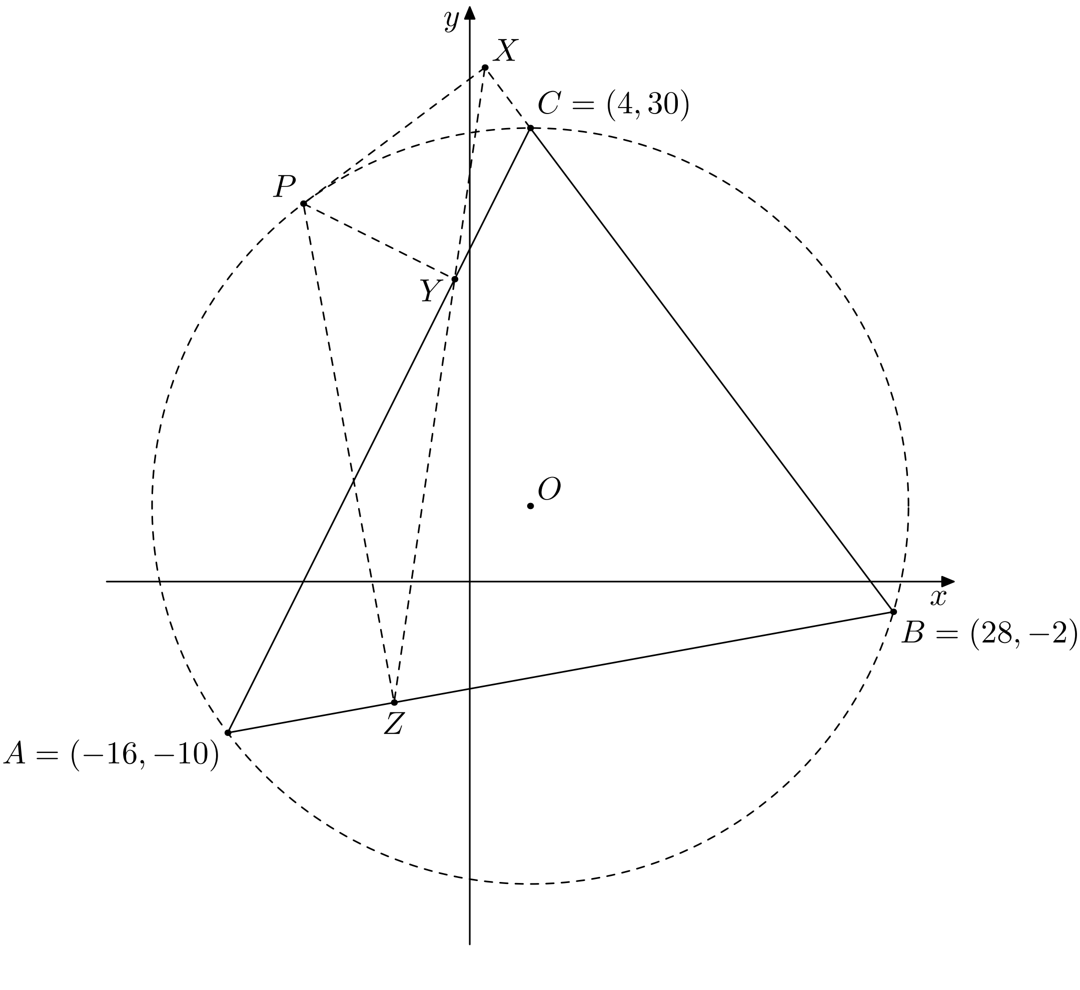
4.6. Prosta Simsona

Zadanie 4.6. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-16, -10)$, $B = (28, -2)$ oraz $C = (4, 30)$ i dany jest punkt $P = (-11, 25)$. Punkty X, Y i Z są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste BC, AC i AB.

1. Wyznacz równania symetralnych boków AC i BC.
2. Oblicz współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie ABC.
3. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.
4. Sprawdź, że punkt P leży na okręgu opisnym na trójkącie ABC.
5. Oblicz współrzędne punktów X, Y i Z.
6. Sprawdź, że punkty X, Y i Z są współliniowe.

Uwaga. To zadanie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia mówiącego, że rzuty prostokątne dowolnego punktu P na proste zawierające boki trójkąta ABC są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Prostą, ńa której leżą te rzuty, nazywamy **prostą Simsona**. To twierdzenie udowodnimy w następnej części.

Rozwiązanie.



1. Równanie symetralnej boku AC wyznaczymy tak jak w zadaniu 2.4:

$$(x+16)^2 + (y+10)^2 = (x-4)^2 + (y-30)^2,$$

czyli $x + 2y = 14$. Podobnie wyznaczamy równanie symetralnej boku BC:

$$(x-28)^2 + (y+2)^2 = (x-4)^2 + (y-30)^2,$$

czyli $3x - 4y = -8$.

2. Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} x + 2y = 14 \\ 3x - 4y = -8 \end{cases}$$

otrzymując $x = 4$ i $y = 5$. Zatem $O = (4, 5)$.

3. Ponieważ

$$|OA|^2 = (4+16)^2 + (5+10)^2 = 625,$$

więc równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC ma postać

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 625.$$

4. Sprawdzamy, że współrzędne punktu P spełniają otrzymane równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC:

$$(-11-4)^2 + (25-5)^2 = 15^2 + 20^2 = 625.$$

5. Prosta prostopadła do boku AC i przechodząca przez punkt P jest równoległa do symetralnej tego boku; ma zatem równanie

$$x + 2y = -11 + 2 \cdot 25,$$

czyli $x + 2y = 39$. Równanie prostej AC ma postać

$$2x - y = 2 \cdot (-16) - (-10),$$

czyli $2x - y = -22$. Teraz rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} x + 2y = 39 \\ 2x - y = -22 \end{cases}$$

otrzymując współrzędne punktu Y: $Y = (-1, 20)$. Podobnie dostajemy $X = (1, 34)$ oraz $Z = (-5, -8)$.

6. Tak jak w zadaniu 2.9 wyznaczamy równanie prostej XY, otrzymując $7x - y = -27$. Ponieważ

$$7 \cdot (-5) - (-8) = -35 + 8 = -27,$$

więc punkt Z leży na prostej XY, czyli punkty X, Y i Z są współliniowe.

ZADANIA DOMOWE

Tę część zakończymy sześcioma zadaniami domowymi, podobnymi do zadań 4.1. – 4.6.

Zadanie 4.7. Dany jest trójkąt ABC, w którym

$$A = (-4, -3), \quad B = (6, 7), \quad C = (4, 13).$$

Punkt D jest rzutem wierzchołka A na prostą BC, punkt E jest rzutem wierzchołka B na prostą AC i punkt F jest rzutem wierzchołka C na prostą AB.

1. Oblicz długości boków trójkąta ABC.
2. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.
3. Wyznacz równania prostych AD, BE i CF.
4. Oblicz współrzędne punktów D, E i F.
5. Punkt H jest punktem przecięcia prostych AD i BE. Oblicz współrzędne punktu H.
6. Sprawdź, że punkt H leży na prostej CF.

Zadanie 4.8. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-5, -3)$, $B = (11, -1)$ oraz $C = (9, 7)$. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB. Punkt S jest punktem przecięcia prostych AK i BL.

1. Wyznacz współrzędne punktów K, L i M.
2. Wyznacz równania prostych AK, BL i CM.
3. Wyznacz współrzędne punktu S.
4. Sprawdź, że punkt S leży na prostej CM.
5. Wykaż, że $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BL}$ oraz $\overrightarrow{CS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CM}$.

Zadanie 4.9. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-4, -11)$, $B = (20, 7)$ oraz $C = (-8, 21)$. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB.

1. Wyznacz współrzędne punktów K, L i M.
2. Wyznacz równania symetralnych boków trójkąta ABC.
3. Punkt O jest punktem przecięcia symetralnych boków BC i AC. Oblicz współrzędne punktu O.
4. Sprawdź, że punkt O leży na symetralnej boku AB.
5. Oblicz odległości punktu O od wierzchołków trójkąta ABC.
6. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Zadanie 4.10. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-13, -10)$, $B = (11, 2)$ oraz $C = (-16, 11)$. Punkty D, E i F są rzutami wierzchołków A, B i C trójkąta na proste zwierające przeciwległe boki. Proste AD i CF przecinają się w punkcie H. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB. Proste AK i CM przecinają się w punkcie S. Symetralne boków BC i AB przecinają się w punkcie O.

1. Wyznacz równania prostych AD i CF.
2. Oblicz współrzędne punktu H.
3. Wyznacz równania prostych AK i CM.

4. Oblicz współrzędne punktu S.
5. Wyznacz równania symetralnych boków BC i AB.
6. Oblicz współrzędne punktu O.
7. Wyznacz równanie prostej OH.
8. Wykaż, że punkt S leży na prostej OH i dzieli odcinek OH wewnętrznie w stosunku $1 : 2$ (tzn. $2 \cdot |OS| = |SH|$).

Zadanie 4.11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-8, -11)$, $B = (16, 7)$ oraz $C = (-4, 17)$. Punkty D, E i F są rzutami wierzchołków A, B i C trójkąta na proste zwierające przeciwległe boki. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB. Punkty T, V i W są odpowiednio środkami odcinków AH, BH i CH.

1. Oblicz współrzędne punktów D, E i F.
2. Oblicz współrzędne punktu H.
3. Oblicz współrzędne punktów K, L i M.
4. Oblicz współrzędne punktów T, V i W.
5. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie DEF.
6. Wykaż, że punkty K, L, M, T, V i W leżą na okręgu opisanym na trójkącie DEF.

Zadanie 4.12. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-6, -8)$, $B = (27, 3)$ oraz $C = (3, 19)$ i dany jest punkt $P = (19, 17)$. Punkty X, Y i Z są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste BC, AC i AB.

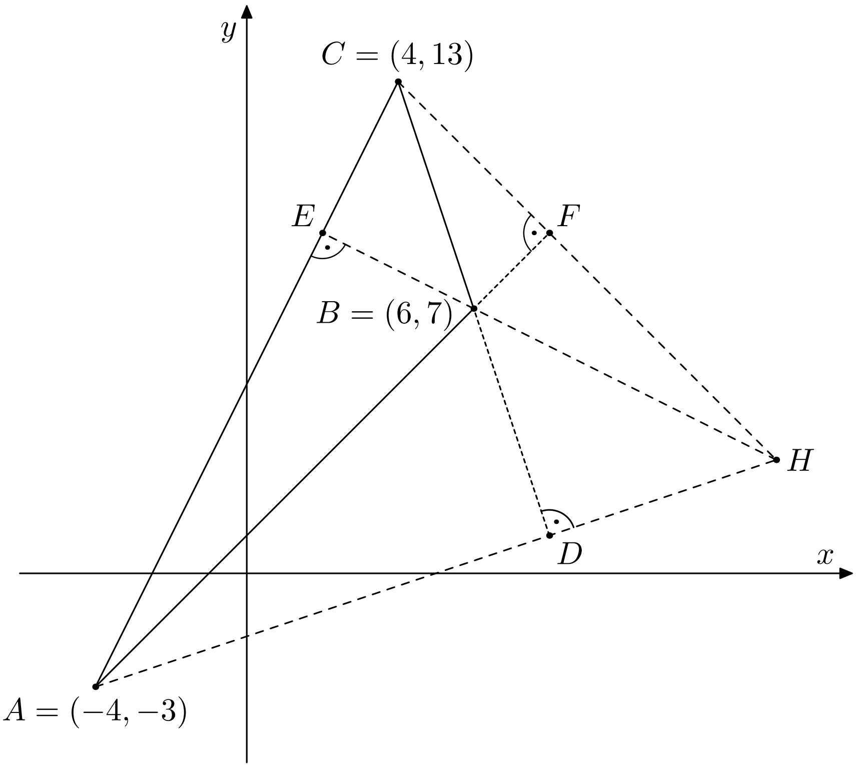
1. Wyznacz równania symetralnych boków AB i AC.
2. Oblicz współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie ABC.
3. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.
4. Sprawdź, że punkt P leży na okręgu opisnym na trójkącie ABC.
5. Oblicz współrzędne punktów X, Y i Z.
6. Wyznacz równanie prostej XY i sprawdź, że punkty X, Y i Z są współliniowe.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ DOMOWYCH

Zadanie 4.7. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-4, -3)$, $B = (6, 7)$ oraz $C = (4, 13)$. Punkt D jest rzutem wierzchołka A na prostą BC, punkt E jest rzutem wierzchołka B na prostą AC i punkt F jest rzutem wierzchołka C na prostą AB. Punkt H jest punktem przecięcia prostych AD i BE.

1. Oblicz długości boków trójkąta ABC.
2. Sprawdź, czy trójkąt ABC jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.
3. Wyznacz równania prostych AD, BE i CF.
4. Oblicz współrzędne punktów D, E i F.
5. Oblicz współrzędne punktu H.
6. Sprawdź, że punkt H leży na prostej CF.

Odpowiedzi.

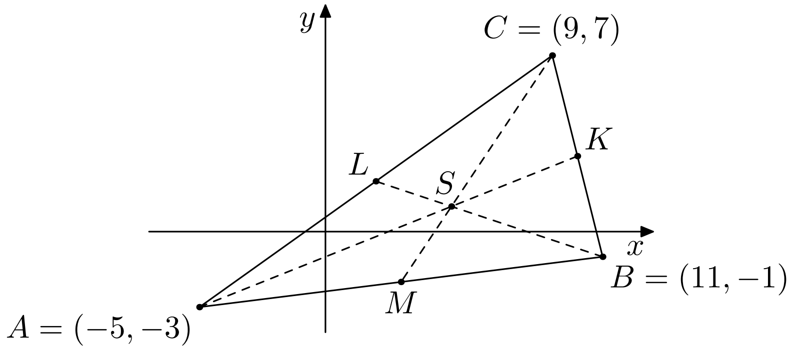


1. $|AB| = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$, $|AC| = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$, $|BC| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.
2. $|AC|^2 = 320 > 240 = 200 + 40 = |AB|^2 + |BC|^2$, więc kąt B jest rozwarty. Można również obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$:
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = [-10, -10] \cdot [-2, 6] = (-10) \cdot (-2) + (-10) \cdot 6 = 20 - 60 = -40 < 0,$$
skąd wynika, że kąt ABC jest rozwarty.
3. Prosta AD ma równanie $x - 3y = 5$; prosta BE ma równanie $x + 2y = 20$; prosta CF ma równanie $x + y = 17$.
4. $D = (8, 1)$, $E = (2, 9)$, $F = (8, 9)$.
5. $H = (14, 3)$
6. Sprawdzamy, że współrzędne punktu H spełniają równanie prostej CF: $8+9 = 17$.

Zadanie 4.8. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-5, -3)$, $B = (11, -1)$ oraz $C = (9, 7)$. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB. Punkt S jest punktem przecięcia prostych AK i BL.

1. Wyznacz współrzędne punktów K, L i M.
2. Wyznacz równania prostych AK, BL i CM.
3. Wyznacz współrzędne punktu S.
4. Sprawdź, że punkt S leży na prostej CM.
5. Wykaż, że $\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BL}$ oraz $\overrightarrow{CS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CM}$.

Odpowiedzi.



1. $K = (10, 3)$, $L = (2, 2)$, $M = (3, -2)$.
2. Prosta AK ma równanie $2x - 5y = 5$; prosta BL ma równanie $x + 3y = 8$; prosta CM ma równanie $3x - 2y = 13$.
3. $S = (5, 1)$.
4. Sprawdzamy, że współrzędne punktu S spełniają równanie prostej CM:

$$L = 3x - 2y = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 15 - 2 = 13 = P.$$

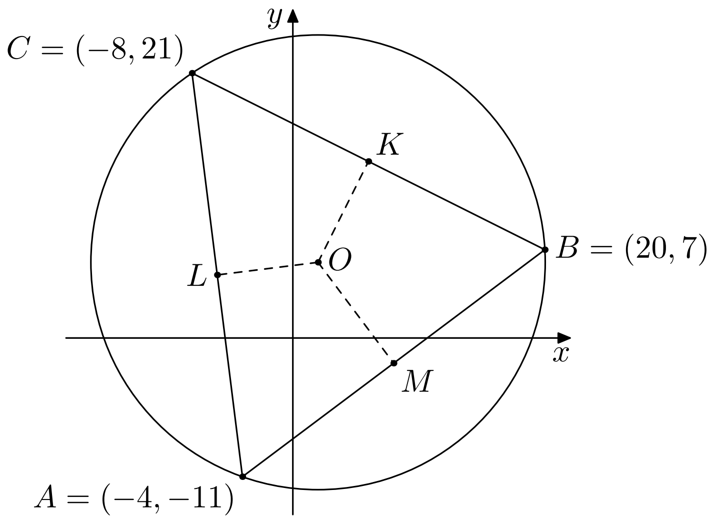
5. Mamy:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AS} &= [10, 4] = \tfrac{2}{3} \cdot [15, 6] = \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AK}, \\ \overrightarrow{BS} &= [-6, 2] = \tfrac{2}{3} \cdot [-9, 3] = \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BL}, \\ \overrightarrow{CS} &= [-4, -6] = \tfrac{2}{3} \cdot [-6, -9] = \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CM}. \end{aligned}$$

Zadanie 4.9. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-4, -11)$, $B = (20, 7)$ oraz $C = (-8, 21)$. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB.

1. Wyznacz współrzędne punktów K, L i M.
2. Wyznacz równania symetralnych boków trójkąta ABC.
3. Punkt O jest punktem przecięcia symetralnych boków BC i AC. Oblicz współrzędne punktu O.
4. Sprawdź, że punkt O leży na symetralnej boku AB.
5. Oblicz odległości punktu O od wierzchołków trójkąta ABC.
6. Napisz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Odpowiedzi.



1. $K = (10, 3)$, $L = (2, 2)$, $M = (3, -2)$.
2. Symetralna boku BC ma równanie $2x - y = -2$; symetralna boku AC ma równanie $x - 8y = -46$; symetralna boku AB ma równanie $4x + 3y = 26$.
3. $O = (2, 6)$.
4. Sprawdzamy, że współrzędne punktu O spełniają równanie symetralnej boku AB:

$$L = 4x + 3y = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 8 + 18 = 26 = P.$$

5. Mamy:

$$\begin{aligned} |OA|^2 &= (2+4)^2 + (6+11)^2 = 6^2 + 17^2 = 36 + 289 = 325, \\ |OB|^2 &= (2-20)^2 + (6-7)^2 = (-18)^2 + (-1)^2 = 324 + 1 = 325, \\ |OC|^2 &= (2+8)^2 + (6-21)^2 = 10^2 + (-15)^2 = 100 + 225 = 325. \end{aligned}$$

Zatem $|OA| = |OB| = |OC| = \sqrt{325}$.

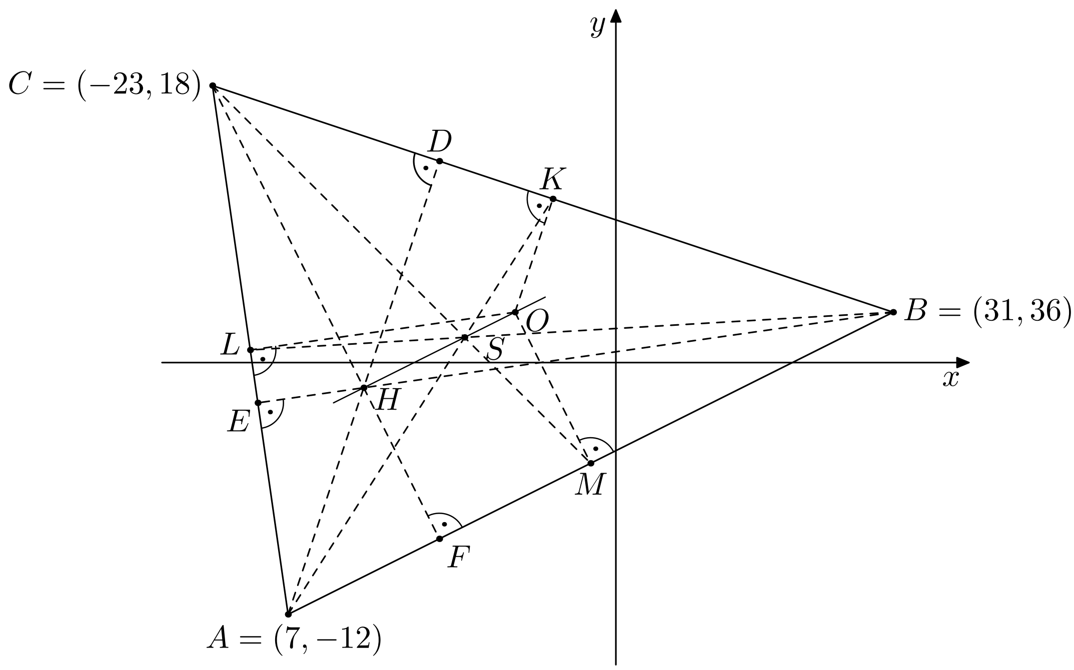
6. Okrąg opisany na trójkącie ABC ma środek w punkcie $O = (2, 6)$ i promień równy $\sqrt{325}$. Równanie tego okręgu ma zatem postać

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 = 325.$$

Zadanie 4.10. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-13, -10)$, $B = (11, 2)$ oraz $C = (-16, 11)$. Punkty D, E i F są rzutami wierzchołków A, B i C trójkąta na proste zwierające przeciwległe boki. Proste AD i CF przecinają się w punkcie H. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB. Proste AK i CM przecinają się w punkcie S. Symetralne boków BC i AB przecinają się w punkcie O.

1. Wyznacz równania prostych AD i CF.
2. Oblicz współrzędne punktu H.
3. Wyznacz równania prostych AK i CM.
4. Oblicz współrzędne punktu S.
5. Wyznacz równania symetralnych boków BC i AB.
6. Oblicz współrzędne punktu O.
7. Wyznacz równanie prostej OH.
8. Wykaż, że punkt S leży na prostej OH i dzieli odcinek OH wewnętrznie w stosunku $1 : 2$ (tzn. $2 \cdot |OS| = |SH|$).

Odpowiedzi.

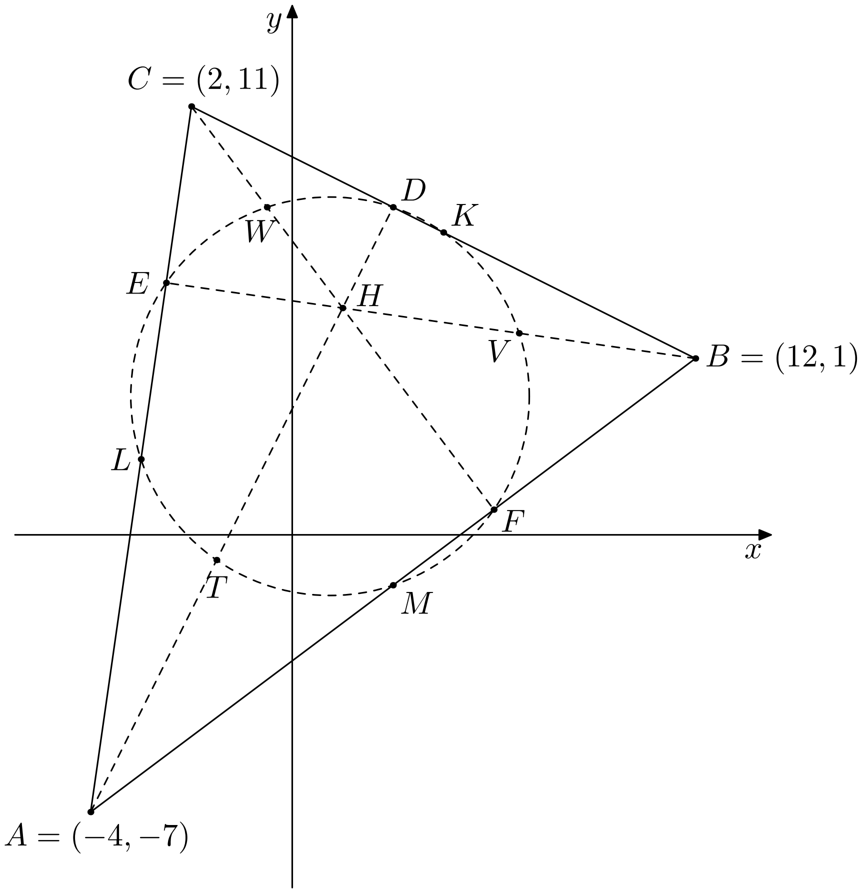


1. Prosta AD ma równanie $3x - y = -29$, prosta CF ma równanie $2x + y = -21$.
2. $H = (-10, -1)$.
3. Prosta AK ma równanie $11x - 7y = -73$, prosta CM ma równanie $x + y = -5$.
4. $S = (-6, 1)$.
5. Symetralna boku BC ma równanie $3x - y = -14$, symetralna boku AB ma równanie $2x + y = -6$.
6. $O = (-4, 2)$.
7. Prosta OH ma równanie $x - 2y = -8$.
8. $\overrightarrow{HS} = [4, 2] = 2 \cdot [2, 1] = 2 \cdot \overrightarrow{SO}$,

Zadanie 4.11. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-8, -11)$, $B = (16, 7)$ oraz $C = (-4, 17)$. Punkty D, E i F są rzutami wierzchołków A, B i C trójkąta na proste zwierające przeciwległe boki. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB. Punkty T, V i W są odpowiednio środkami odcinków AH, BH i CH.

1. Oblicz współrzędne punktów D, E i F.
2. Oblicz współrzędne punktu H.
3. Oblicz współrzędne punktów K, L i M.
4. Oblicz współrzędne punktów T, V i W.
5. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie DEF.
6. Wykaż, że punkty K, L, M, T, V i W leżą na okręgu opisanym na trójkącie DEF.

Odpowiedzi.

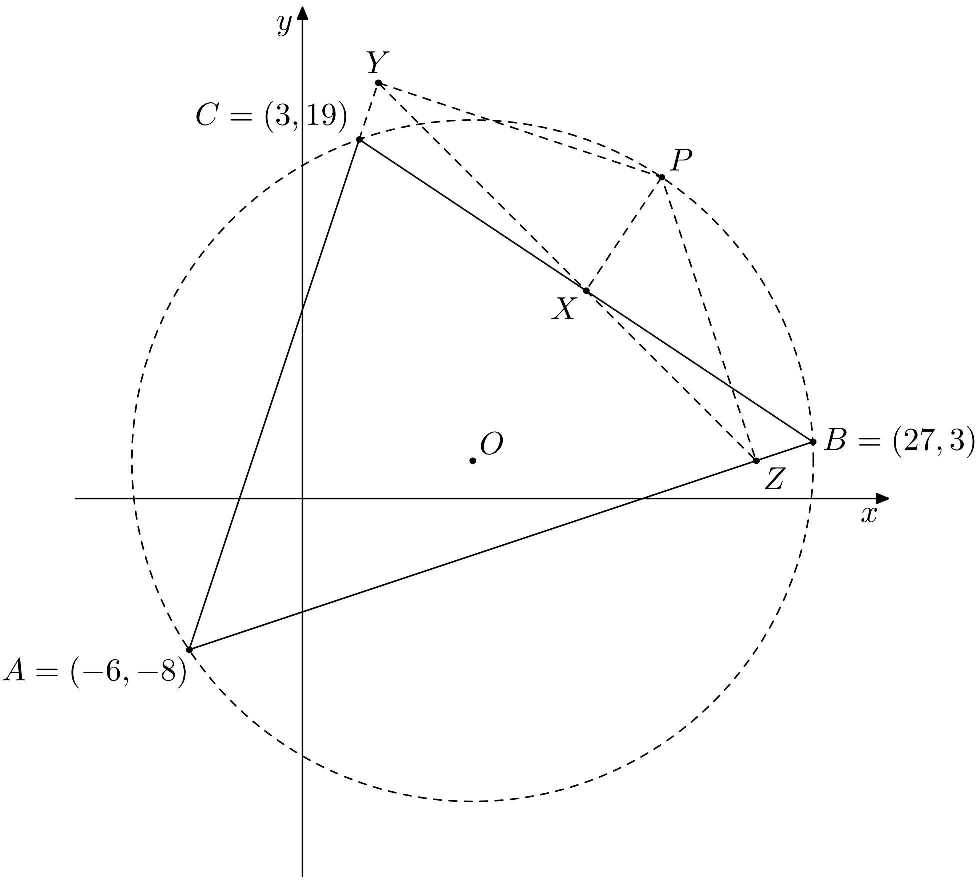


1. $D = (4, 13)$, $E = (-5, 10)$, $F = 8, 1)$.
2. $H = (2, 9)$.
3. $K = (6, 12)$, $L = (-6, 3)$, $M = 4, -2)$.
4. $T = (-3, -1)$, $V = (9, 8)$, $W = (-1, 13)$.
5. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{250}{4}$.
6. Bezpośrednie sprawdzenie.

Zadanie 4.12. Dany jest trójkąt ABC, w którym $A = (-6, -8)$, $B = (27, 3)$ oraz $C = (3, 19)$ i dany jest punkt $P = (19, 17)$. Punkty X, Y i Z są rzutami prostokątnymi punktu P odpowiednio na proste BC, AC i AB.

1. Wyznacz równania symetralnych boków AB i AC.
2. Oblicz współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie ABC.
3. Wyznacz równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC.
4. Sprawdź, że punkt P leży na okręgu opisnym na trójkącie ABC.
5. Oblicz współrzędne punktów X, Y i Z.
6. Wyznacz równanie prostej XY i sprawdź, że punkty X, Y i Z są współliniowe.

Odpowiedzi.



1. Symetralna boku AB ma równanie $3x + y = 29$, symetralna boku AC ma równanie $x + 3y = 15$.
2. $O = (9, 2)$.
3. $(x - 9)^2 + (y - 2)^2 = 325$.
4. Sprawdzamy, że $(19 - 9)^2 + (17 - 2)^2 = 10^2 + 15^2 = 100 + 225 = 325$.
5. $X = (15, 11)$, $Y = (4, 22)$, $Z = (24, 2)$.
6. Prosta XY ma równanie $x + y = 26$; sprawdzamy, że $24 + 2 = 26$.

CZĘŚĆ V
PRZYKŁADOWE TWIERDZENIA

5.1. Ortocentrum trójkąta

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

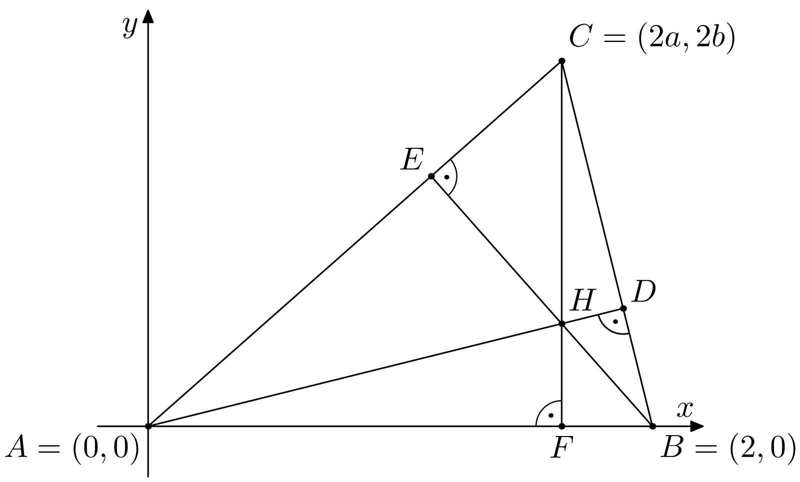
Twierdzenie 5.1. Proste zwierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Jedną z najtrudniejszych części dowodu analitycznego jest odpowiedni dobór układu współrzędnych. Pamiętajmy bowiem, że w dowodzie każdego twierdzenia geometrycznego mamy prawo dobrać układ współrzędnych (i jednostkę długości) w sposób najdogodniejszy dla nas: taki, by obliczenia były jak najprostsze.

Przypuśćmy zatem, że mamy dany trójkąt ABC. Wybierzmy układ współrzędnych tak, by jego początek znajdował się w punkcie A. Następnie jako oś Ox wybierzmy prostą AB. Teraz punkt A ma współrzędne $(0, 0)$, a punkt B ma współrzędne $(x, 0)$ dla pewnego x. Możemy przy tym tak zorientować oś Ox, by punkt B leżał na dodatniej półosi. Teraz dobieramy jednostkę. Bardzo częstym wyborem jednostki jest długość odcinka AB. Wtedy punkt B będzie miał współrzędne $(0, 1)$. My postąpimy nieco inaczej.

Kilka kolejnych twierdzeń będziemy dowodzić przy tym samym wyborze układu współrzędnych. W niektórych z nich będziemy korzystać ze środków boków trójkąta. Aby uniknąć nadmiernej liczby ułamków w obliczeniach przyjmiemy, że punkt B ma współrzędne $B = (2, 0)$; inaczej mówiąc, jednostką długości jest połowa długości odcinka AB.

Wierzchołek C ma teraz współrzędne (x, y) dla pewnych x i y. Ponieważ nie leży on na prostej AB, więc $y \neq 0$. Bierzemy teraz takie liczby a i b, że $x = 2a$ oraz $y = 2b$. Punkt C ma zatem współrzędne $C = (2a, 2b)$, gdzie $b \neq 0$.



Wyznaczamy najpierw równanie prostej AD. Jest ona prostopadła do wektora

$$\overrightarrow{BC} = [2a - 2, 2b - 0] = 2 \cdot [a - 1, b].$$

Ma zatem równanie postaci $(a-1)x + by = c$ dla pewnego c. Liczbę c obliczamy podstawiając do otrzymanego równania współrzędne punktu A. Otrzymamy $c = 0$, a więc prosta AD ma równanie $(a-1)x + by = 0$.

Następnie wyznaczamy równanie prostej BE. Jest ona prostopadła do wektora

$$\overrightarrow{AC} = [2a - 0, 2b - 0] = 2 \cdot [a, b].$$

Ma zatem równanie postaci $ax + by = c$. Liczbę c obliczamy podstawiając do tego równania współrzędne punktu B:

$$c = a \cdot 2 + b \cdot 0 = 2a.$$

Ostatecznie równanie prostej BE ma postać $ax + by = 2a$.

Wreszcie wyznaczamy równanie prostej CF. Jest ona prostopadła do osi Ox i przechodzi przez punkt C; ma zatem równanie $x = 2a$.

Wyznaczamy następnie współrzędne punktu H, będącego punktem przecięcia prostych BE i CF. W tym celu rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} ax + by = 2a \\ x = 2a \end{cases}$$

otrzymując $x = 2a$ oraz $y = \frac{2a-2a^2}{b}$. Zatem

$$H = \left(2a, \frac{2a - 2a^2}{b}\right).$$

Dowód zakończymy wykazując, że współrzędne punktu H spełniają równanie prostej AD:

$$L = (a-1)x + by = (a-1) \cdot 2a + b \cdot \frac{2a - 2a^2}{b} = 2a^2 - 2a + 2a - 2a^2 = 0 = P,$$

c. b. d. o.

Trójkąt ABC z tak wybranym układem współrzędnych będzie używany jeszcze kilkakrotnie. Zapamiętajmy współrzędne jego ortocentrum:

$$H = \left(2a, \frac{2a - 2a^2}{b}\right).$$

W jednym z następnych twierdzeń wykorzystamy współrzędne punktów D, E i F. Najłatwiej wyznaczyć współrzędne punktu F, gdyż jest on rzutem punktu C na oś Ox. Mamy więc $F = (2a, 0)$.

Prosta AD ma równanie $(a-1)x+by=0$. Prostopadła do niej prosta BC ma zatem równanie $bx-(a-1)y=c$ dla pewnego c. Liczbę c obliczamy podstawiając do otrzymanego równania współrzędne punktu B; dostajemy $c=2b$. Zatem prosta BC ma równanie $bx-(a-1)y=2b$. Współrzędne punktu D otrzymujemy teraz rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} bx-(a-1)y=2b \\ (a-1)x+by=0 \end{cases}$$

Ponieważ $b\neq 0$, więc możemy wyznaczyć x z pierwszego równania i podstawić do drugiego. Otrzymujemy kolejno:

$$\begin{gathered} x=\frac{(a-1)y+2b}{b}, \\ (a-1)\cdot\frac{(a-1)y+2b}{b}+by=0, \\ (a-1)^2y+2(a-1)b+b^2y=0, \\ \big((a-1)^2+b^2\big)y=2(1-a)b, \\ y=\frac{2(1-a)b}{(a-1)^2+b^2}, \end{gathered}$$

gdyż $(a-1)^2+b^2\neq 0$. W podobny sposób z drugiego równania wyznaczamy $y=\frac{(1-a)x}{b}$ i po podstawieniu do pierwszego równania otrzymujemy (szczegóły pozostawiamy jako ćwiczenie):

$$x=\frac{2b^2}{(a-1)^2+b^2}.$$

Ostatecznie

$$D=\left(\frac{2b^2}{(a-1)^2+b^2},\frac{2(1-a)b}{(a-1)^2+b^2}\right).$$

W podobny sposób wyznaczamy współrzędne punktu E. Otrzymujemy kolejno równania prostych BE i AC:

$$\begin{aligned} BE:&\quad ax+by=2a, \\ AC:&\quad bx-ay=0 \end{aligned}$$

i współrzędne punktu E:

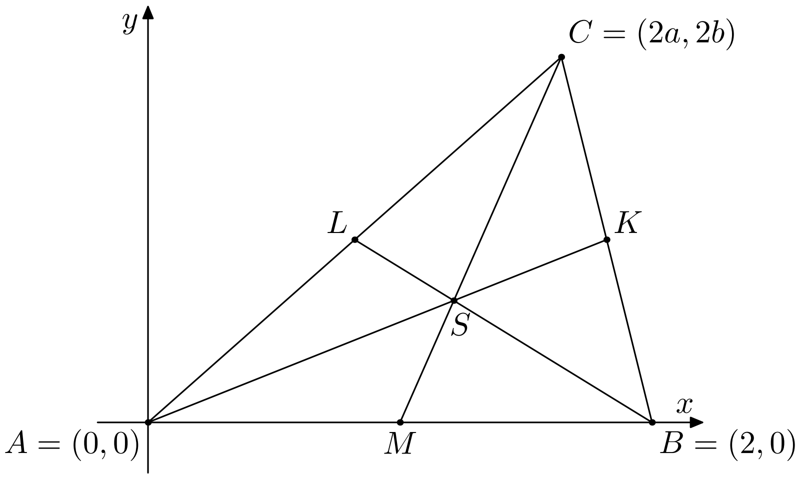
$$E=\left(\frac{2a^2}{a^2+b^2},\frac{2ab}{a^2+b^2}\right).$$

5.2. Środek ciężkości trójkąta

Twierdzenie 5.2. Środkowe w trójkącie przecinają się w jednym punkcie, nazywanym **środkiem ciężkości trójkąta**. Ponadto środek ciężkości trójkąta dzieli każdą środkową w stosunku 2 : 1 (odcinek od wierzchołka do środka ciężkości jest dwa razy dłuższy od odcinka łączącego środek ciężkości ze środkiem boku).

Dowód. Dany jest trójkąt ABC. Wybieramy układ współrzędnych tak samo jak w poprzednim twierdzeniu. Mamy zatem

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (2a, 2b).$$



Najpierw wyznaczamy współrzędne środków boków:

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{2a+2}{2}, \frac{2b+0}{2}\right) = (a+1, b), \\ L &= (a, b), \\ M &= (1, 0). \end{aligned}$$

Następnie wyznaczamy równanie prostej AK. Mamy $\overrightarrow{AK} = [a + 1, b]$, a więc równanie prostej AK ma postać $bx - (a+1)y = c$ dla pewnego c. Podstawiając do tego równania współrzędne punktu $A = (0, 0)$, otrzymujemy $c = 0$. Prosta AK ma zatem równanie $bx - (a + 1)y = 0$.

Podobnie $\overrightarrow{BL} = [a - 2, b]$, więc równanie prostej BL ma postać $bx - (a - 2)y = c$ dla pewnego c. Podstawiając współrzędne punktu B, otrzymujemy ostatecznie równanie $bx - (a - 2)y = 2b$.

Wreszcie $\overrightarrow{CM} = [1 - 2a, -2b]$ i w podobny sposób otrzymujemy równanie prostej CM: $2bx + (1 - 2a)y = 2b$.

Współrzędne punktu S otrzymujemy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} bx - (a+1)y = 0 \\ bx - (a-2)y = 2b \end{cases}$$

Otrzymujemy

$$S = \left(\frac{2a+2}{3}, \frac{2b}{3} \right).$$

Sprawdzamy, że współrzędne punktu S spełniają równanie prostej CM:

$$L = 2bx + (1-2a)y = 2b \cdot \frac{2a+2}{3} + (1-2a) \cdot \frac{2b}{3} = \frac{2b}{3} \cdot (2a+2+1-2a) = \frac{2b}{3} \cdot 3 = 2b = P.$$

Wreszcie sprawdzamy, że punkt S dzieli środkowe w stosunku $2:1$. Mianowicie

$$\overrightarrow{AS} = \left[\frac{2a+2}{3}, \frac{2b}{3} \right] = \frac{2}{3} \cdot [a+1, b] = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AK},$$

$$\overrightarrow{BS} = \left[\frac{2a+2}{3} - 2, \frac{2b}{3} \right] = \left[\frac{2a-4}{3}, \frac{2b}{3} \right] = \frac{2}{3} \cdot [a-2, b] = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BL},$$

$$\overrightarrow{CS} = \left[\frac{2a+2}{3} - 2a, \frac{2b}{3} - 2b \right] = \left[\frac{2-4a}{3}, -\frac{4b}{3} \right] = \frac{2}{3} \cdot [1-2a, -2b] = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BM},$$

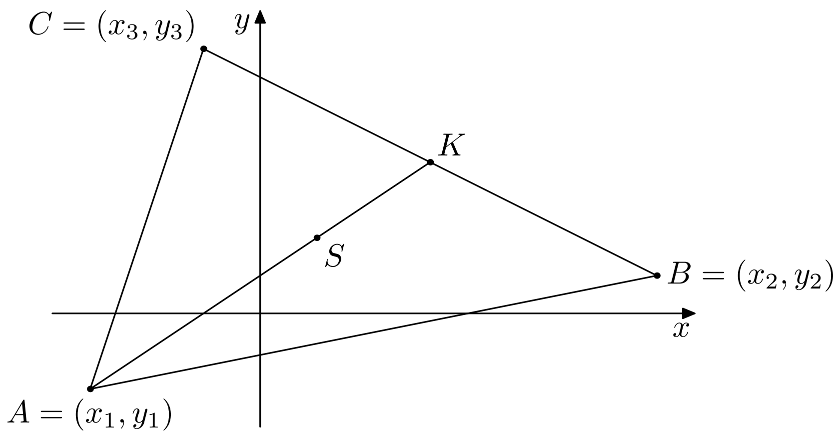
c. b. d. o.

Uwaga 1. Oczywiście wystarczyło sprawdzić, że punkt S dzieli jedną środkową (np. AK) w stosunku $2:1$. Analogiczną własność pozostałych środkowych otrzymujemy przez prostą zamianę układu współrzędnych tak, by ta środkowa stała się środkową łączącą wierzchołki o współrzędnych $(0,0)$ i $(a+1, b)$.

Uwaga 2. Korzystając z twierdzenia 5.2 o środku ciężkości trójkąta możemy wyprowadzić wzory na współrzędne środka ciężkości dowolnego trójkąta w układzie współrzędnych. Przypuśćmy zatem, że mamy dany trójkąt ABC, w którym

$$A = (x_1, y_1), \quad B = (x_2, y_2), \quad C = (x_3, y_3).$$

Niech punkt K będzie środkiem boku BC i niech S będzie środkiem ciężkości trójkąta ABC.



Punkt K ma współrzędne

$$K = \left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2} \right),$$

skąd wynika, że

$$\overrightarrow{AK} = \left[\frac{x_2 + x_3}{2} - x_1, \frac{y_2 + y_3}{2} - y_1\right] = \left[\frac{x_2 + x_3 - 2x_1}{2}, \frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{2}\right].$$

Zatem

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AK} = \left[\frac{x_2 + x_3 - 2x_1}{3}, \frac{y_2 + y_3 - 2y_2}{3}\right].$$

Współrzędne punktu S otrzymujemy dodając do współrzędnych punktu A współrzędne wektora $\overrightarrow{AS}$:

$$S = A + \overrightarrow{AS} = \left(x_1 + \frac{x_2 + x_3 - 2x_1}{3}, y_1 + \frac{y_2 + y_3 - 2y_1}{3}\right) =$$
$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

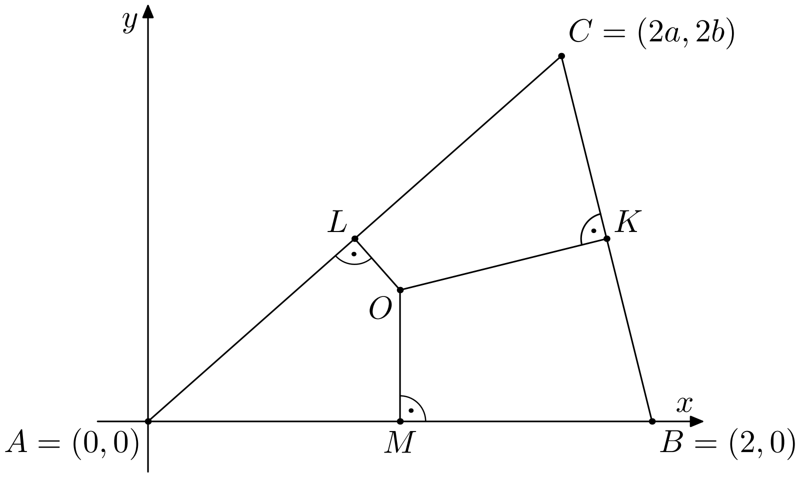
Zapamiętajmy: współrzędne środka ciężkości są średnimi arytmetycznymi współrzędnych wierzchołków trójkąta.

5.3. Okrąg opisany na trójkącie

Twierdzenie 5.3. Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt jest jednakowo oddalony od wierzchołków trójkąta, a więc jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie.

Dowód. Dany jest trójkąt ABC. Wybieramy układ współrzędnych tak samo jak w poprzednim twierdzeniu. Mamy zatem

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (2a, 2b).$$



Tak jak w poprzednim zadaniu najpierw wyznaczamy współrzędne środków boków:

$$\begin{aligned} K &= \left(\frac{2a+2}{2}, \frac{2b+0}{2}\right) = (a+1, b), \\ L &= (a, b), \\ M &= (1, 0). \end{aligned}$$

Następnie wyznaczamy równania symetralnych boków. Tak jak w twierdzeniu 5.1 dostajemy

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= 2 \cdot [a-1, b], \\ \overrightarrow{AC} &= 2 \cdot [a, b]. \end{aligned}$$

Równanie symetralnej boku BC ma zatem postać $(a-1)x + by = c$, przy czym c wyznaczamy podstawiając do równania współrzędne punktu K:

$$c = (a-1)x + by = (a-1)(a+1) + b^2 = a^2 + b^2 - 1.$$

Zatem równanie symetralnej boku BC ma postać $(a-1)x + by = a^2 + b^2 - 1$. Równanie symetralnej boku AC ma postać $ax + by = c$; analogicznie wyznaczamy c podstawiając do równania współrzędne punktu L. Otrzymamy równanie $ax + by = a^2 + b^2$. Wreszcie zauważamy, że symetralna boku AB jest prostopadła do osi Ox i przechodzi przez punkt $(1, 0)$; ma zatem równanie $x = 1$.

Niech teraz punkt O będzie punktem przecięcia symetralnych boków AB i AC. Jego współrzędne otrzymamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} ax + by = a^2 + b^2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Dostajemy

$$O = \left(1, \frac{a^2 + b^2 - a}{b}\right).$$

Teraz sprawdzamy, że współrzędne punktu O spełniają równanie trzeciej symetralnej:

$$L = (a-1)x + by = (a-1) \cdot 1 + b \cdot \frac{a^2 + b^2 - a}{b} = a - 1 + a^2 + b^2 - a = a^2 + b^2 - 1 = P,$$

co dowodzi, że wszystkie trzy symetralne przecinają się w jednym punkcie.

Obliczamy teraz odległości punktu O od wierzchołków trójkąta. Mamy

$$\begin{aligned}
|OA|^2 &= 1^2 + \left(\frac{a^2 + b^2 - a}{b}\right)^2 = \frac{(a^2 + b^2 - a)^2 + b^2}{b^2}, \\
|OB|^2 &= (1-2)^2 + \left(\frac{a^2 + b^2 - a}{b}\right)^2 = \frac{(a^2 + b^2 - a) + b^2}{b^2}, \\
|OC|^2 &= (1-2a)^2 + \left(\frac{a^2 + b^2 - a}{b} - 2b\right)^2 = (2a-1)^2 + \left(\frac{(a^2 + b^2 - a) - 2b^2}{b}\right)^2 = \\
&= \frac{\left((a^2 + b^2 - a) - 2b^2\right)^2 + (2a-1)^2 b^2}{b^2} = \\
&= \frac{(a^2 + b^2 - a)^2 - 4b^2(a^2 + b^2 - a) + 4b^4 + b^2(4a^2 - 4a + 1)}{b^2} = \\
&= \frac{(a^2 + b^2 - a)^2 - 4a^2b^2 - 4b^4 + 4ab^2 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4ab^2 + b^2}{b^2} = \\
&= \frac{(a^2 + b^2 - a)^2 + b^2}{b^2}.
\end{aligned}$$

Zatem $|OA| = |OB| = |OC|$, c. b. d. o.

W dalszym ciągu potrzebne będą współrzędne środka okręgu opisanego na trójkącie ABC. Przypomnijmy zatem

$$O = \left(1, \frac{a^2 + b^2 - a}{b}\right).$$

Możemy też zapisać równanie okręgu opisanego na naszym trójkącie:

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{a^2 + b^2 - a}{b}\right)^2 = \frac{(a^2 + b^2 - a)^2 + b^2}{b^2}.$$

Po prostych przekształceniach algebraicznych dostajemy następującą postać tego równania:

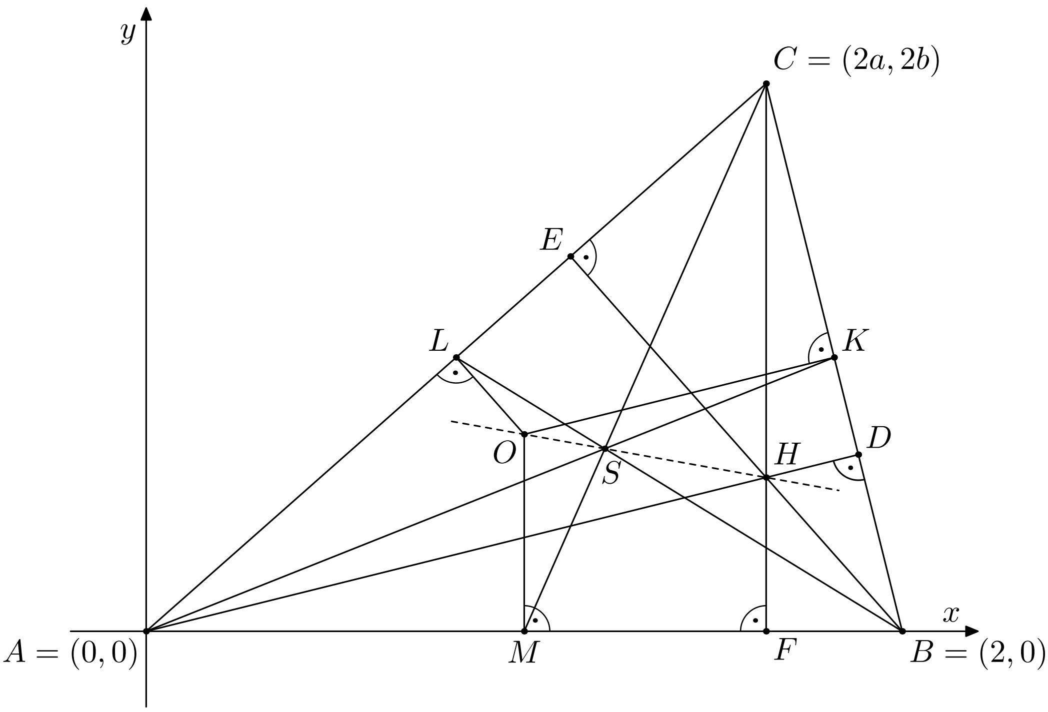
$$bx^2 + by^2 - 2bx - 2(a^2 + b^2 - a)y = 0.$$

5.4. Prosta Eulera

Twierdzenie 5.4. Dany jest trójkąt ABC. Punkt H jest ortocentrum tego trójkąta, punkt S jest środkiem ciężkości, punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wtedy punkty H, S i O są współliniowe; prostą OH nazywamy **prostą Eulera** trójkąta ABC. Ponadto $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot OH$, czyli punkt S dzieli wewnętrznie odcinek OH w stosunku $1 : 2$.

Dowód. Dany jest trójkąt ABC. Wybieramy układ współrzędnych tak samo jak w poprzednich trzech twierdzeniach. Mamy zatem

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (2a, 2b).$$



W dowodach poprzednich twierdzeń wyznaczyliśmy współrzędne punktów H, S i O:

$$H = \left(2a, \frac{2a - 2a^2}{b}\right), \quad S = \left(\frac{2a + 2}{3}, \frac{2b}{3}\right), \quad O = \left(1, \frac{a^2 + b^2 - a}{b}\right).$$

Oczywiście wystarczy wykazać, że $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot OH$. Stąd wynika również współliniowość punktów O, S i H.

Mamy zatem:

$$\overrightarrow{OH} = \left[2a - 1, \frac{2a - 2a^2}{b} - \frac{a^2 + b^2 - a}{b}\right] = \left[2a - 1, \frac{3a - 3a^2 - b^2}{b}\right],$$

$$\overrightarrow{OS} = \left[\frac{2a + 2}{3} - 1, \frac{2b}{3} - \frac{a^2 + b^2 - a}{b}\right] = \left[\frac{2a - 1}{3}, \frac{2b^2 - 3a^2 - 3b^2 + 3a}{3b}\right] =$$

$$= \left[\frac{2a - 1}{3}, \frac{3a - 3a^2 - b^2}{3b}\right] = \frac{1}{3} \cdot \left[2a - 1, \frac{3a - 3a^2 - b^2}{b}\right] = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OH}.$$

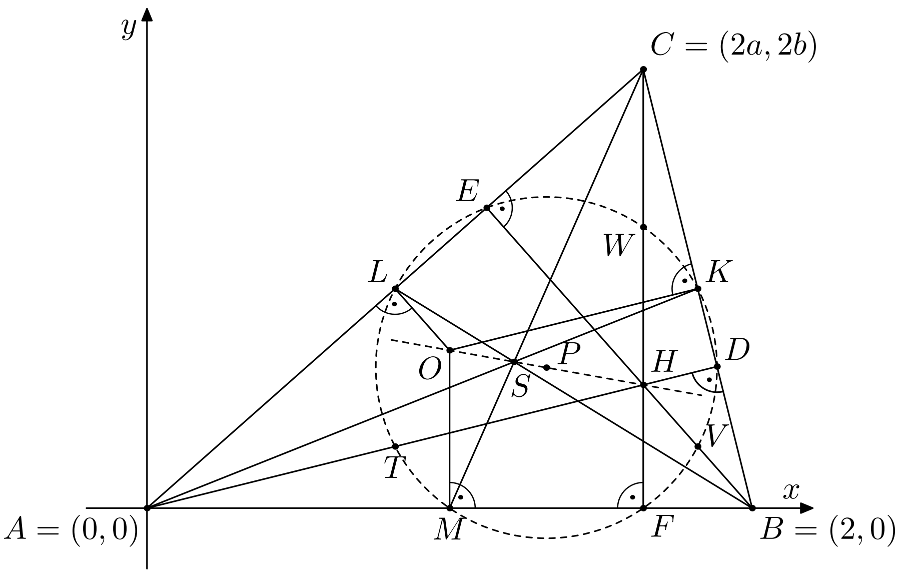
To kończy dowód twierdzenia.

5.5. Okrąg dziewięciu punktów

Twierdzenie 5.5. Dany jest trójkąt ABC. Punkty D, E i F są odpowiednio rzutami wierzchołków A, B i C na proste zawierające przeciwległe boki. Punkt H jest ortocentrum tego trójkąta. Punkty K, L i M są odpowiednio środkami boków BC, AC i AB. Punkty T, V i W są odpowiednio środkami odcinków AH, BH i CH. Wtedy punkty D, E, F, K, L, M, T, V i W leżą na jednym okręgu. Ten okrąg nazywamy **okręgiem dziewięciu punktów** (lub **okręgiem Feuerbacha**) dla trójkąta ABC.

Dowód. Dany jest trójkąt ABC. Wybieramy układ współrzędnych tak samo jak w poprzednich pięciu twierdzeniach. Mamy zatem

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (2a, 2b).$$



W dowodach poprzednich twierdzeń (i w uwagach po tych dowodach) wyznaczyliśmy współrzędne wielu potrzebnych punktów. Mamy zatem:

$$\begin{aligned}
D &= \left(\frac{2b^2}{(a-1)^2+b^2}, \frac{2(1-a)b}{(a-1)^2+b^2}\right),\\
E &= \left(\frac{2a^2}{a^2+b^2}, \frac{2ab}{a^2+b^2}\right),\\
F &= (2a, 0),\\
H &= \left(2a, \frac{2a-2a^2}{b}\right), \quad O = \left(1, \frac{a^2+b^2-a}{b}\right),\\
K &= \left(\frac{2a+2}{2}, \frac{2b+0}{2}\right) = (a+1, b),\\
L &= (a, b),\\
M &= (1, 0).
\end{aligned}$$

Teraz wyznaczamy współrzędne punktów T, V, W:

$$\begin{aligned} T &= \left(a, \frac{a-a^2}{b}\right), \\ V &= \left(a+1, \frac{a-a^2}{b}\right), \\ W &= \left(2a, \frac{b^2-a^2+a}{b}\right). \end{aligned}$$

Następnie wyznaczamy równanie okręgu opisanego na trójkącie KLM. Najpierw zauważamy, że punkty K i L leżą na prostej o równaniu $y = b$, równoległej do osi Ox. Zatem symetralna odcinka KL jest prostopadła do osi Ox. Ponieważ środek odcinka KL ma współrzędne $\left(\frac{2a+1}{2}, b\right)$, więc symetralna odcinka KL ma równanie $x = \frac{2a+1}{2}$. Ponieważ $\overrightarrow{ML} = [a-1, b]$, więc symetralna odcinka ML ma równanie postaci $(a-1)x + by = c$ dla pewnego c. Liczbę c wyznaczymy podstawiając do tego równania współrzędne środka odcinka ML. Ten środek ma współrzędne $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b}{2}\right)$; zatem

$$c = (a-1)\cdot\frac{a+1}{2} + b\cdot\frac{b}{2} = \frac{(a-1)(a+1)+b^2}{2} = \frac{a^2+b^2-1}{2}.$$

Zatem symetralna odcinka ML ma równanie

$$(a-1)x + by = \frac{a^2+b^2-1}{2},$$

czyli

$$2(a-1)x + 2by = a^2+b^2-1.$$

Niech P będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie KLM. Współrzędne punktu P wyznaczymy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 2(a-1)x + 2by = a^2+b^2-1 \\ x = \frac{2a+1}{2} \end{cases}$$

Podstawiając podaną w drugim równaniu wartość x do pierwszego równania, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 2(a-1)\cdot\frac{2a+1}{2} + 2by &= a^2+b^2-1, \\ (a-1)(2a+1) + 2by &= a^2+b^2-1, \\ 2a^2-a-1+2by &= a^2+b^2-1, \\ 2by &= b^2-a^2+a, \\ y &= \frac{b^2-a^2+a}{2b}. \end{aligned}$$

Zatem

$$P = \left(\frac{2a+1}{2}, \frac{b^2-a^2+a}{2b}\right).$$

Promień okręgu opisanego na trójkącie KLM jest równy $|PM|$. Mamy:

$$|PM|^2 = \left(\frac{2a+1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{b^2 - a^2 + a}{2b}\right).$$

Zatem równanie okręgu opisanego na trójkącie KLM ma postać

$$\left(x - \frac{2a+1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b^2 - a^2 + a}{2b}\right) = \left(\frac{2a+1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{b^2 - a^2 + a}{2b}\right).$$

Po nietrudnych przekształceniach algebraicznych otrzymujemy równanie

$$bx^2 + by^2 - (2a+1)bx - (b^2 - a^2 + a)y + 2ab = 0.$$

Teraz wystarczy sprawdzić, że jeden z punktów D, E, F leży na tym okręgu oraz że jeden z punktów T, V, W leży na tym okręgu.

Podstawiamy współrzędne punktu $F = (2a, 0)$ do równania okręgu:

$$L = b \cdot (2a)^2 - (2a+1)b \cdot (2a) + 2ab = 4a^2b - 4a^2b - 2ab + 2ab = 0 = P.$$

Podstawiamy wreszcie współrzędne punktu $T = \left(a, \frac{a-a^2}{b}\right)$ do równania okręgu. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
L &= bx^2 + by^2 - (2a+1)bx - (b^2 - a^2 + a)y + 2ab = \\
&= b \cdot a^2 + b \cdot \left(\frac{a-a^2}{b}\right)^2 - 2(a+1)b \cdot a - (b^2 - a^2 + a) \cdot \frac{a-a^2}{b} + 2ab = \\
&= a^2b + \frac{(a-a^2)^2}{b^2} - ab(2a+1) - \frac{(b^2 - a^2 + a)(a-a^2)}{b} + 2ab = \\
&= a^2b - 2a^2b - ab + 2ab + \frac{(a-a^2)\big((a-a^2) - (b^2 - a^2 + a)\big)}{b} = \\
&= ab - a^2b + \frac{(a-a^2) \cdot b^2}{b} = ab - a^2b + (a-a^2)b = 0 = P.
\end{aligned}$$

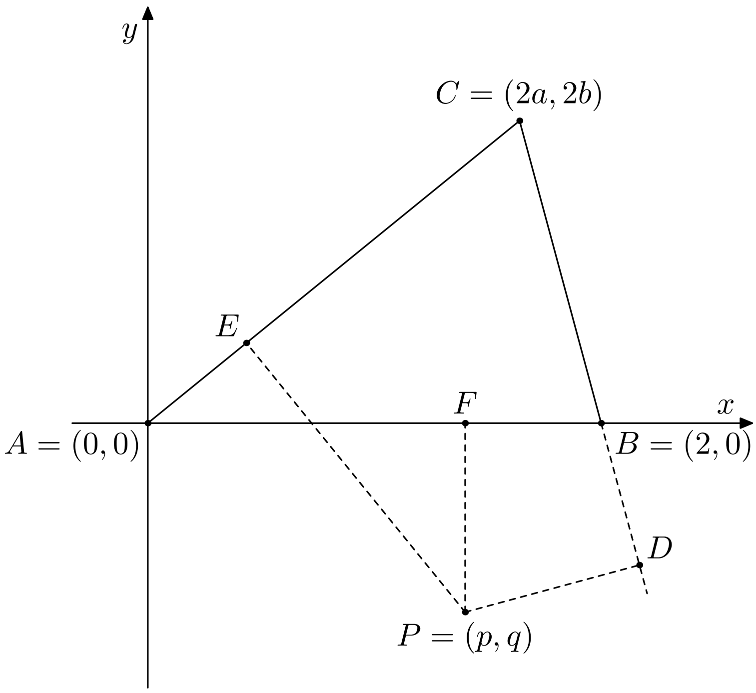
5.6. Prosta Simsona

Twierdzenie 5.6. Dany jest trójkąt ABC i punkt P. Punkty D, E i F są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktu P na proste BC, AC i AB. Wówczas punkty D, E i F są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Prostą, ą której leżą rzuty punktu P nazywamy **prostą Simsona**.

Dowód. Dany jest trójkąt ABC. Wybieramy układ współrzędnych tak samo jak w poprzednich pięciu twierdzeniach. Mamy zatem

$$A = (0, 0), \quad B = (2, 0), \quad C = (2a, 2b).$$

Niech ponadto $P = (p, q)$.



W dowodzie twierdzenia 5.3 wyznaczyliśmy równanie okręgu opisanego na trójkącie ABC:

$$bx^2 + by^2 - 2bx - 2(a^2 + b^2 - a)y = 0.$$

Punkt $P = (p, q)$ leży zatem na okręgu opisanym na trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy

$$bp^2 + bq^2 - 2bp - 2(a^2 + b^2 - a)q = 0. \tag{5.6}$$

Pokażemy, że powyższa równość (5.6) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, by punkty D, E i F były współiniowe.

W dowodzie twierdzenia 5.1 wyznaczyliśmy równania prostych AC i BC:

$$\begin{aligned} AC: &\quad bx - ay = 0, \\ BC: &\quad bx - (a-1)y = 2b. \end{aligned}$$

Prosta PE jest prostopadła do prostej AC i przechodzi przez punkt $P = (p, q)$. Ma zatem równanie

$$ax + by = ap + bq.$$

Współrzędne punktu E wyznaczamy rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} bx - ay = 0 \\ ax + by = ap + bq \end{cases}$$

Ponieważ $b \neq 0$, więc z pierwszego równania wyznaczamy

$$x = \frac{ay}{b}$$

i po podstawieniu do drugiego równania otrzymujemy

$$a \cdot \frac{ay}{b} + by = ap + bq,$$

czyli (po pomnożeniu obu stron przez b)

$$(a^2 + b^2)y = b(ap + bq).$$

Ponieważ $a^2 + b^2 \neq 0$, więc

$$y = \frac{b(ap + bq)}{a^2 + b^2}.$$

W podobny sposób wyznaczamy

$$y = \frac{ap + bq - ax}{b}$$

z drugiego równania i po podstawieniu do pierwszego równania otrzymujemy ostatecznie

$$x = \frac{a(ap + bq)}{a^2 + b^2}.$$

Zatem

$$E = \left(\frac{a(ap + bq)}{a^2 + b^2}, \frac{b(ap + bq)}{a^2 + b^2} \right).$$

Prosta PD jest prostopadła do prostej BC i przechodzi przez punkt $P = (p, q)$. Ma ona zatem równanie

$$(a - 1)x + by = (a - 1)p + bq.$$

Współrzędne punktu D wyznaczamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} bx - (a - 1)y = 2b \\ (a - 1)x + by = (a - 1)p + bq \end{cases}$$

Ten układ równań rozwiązujemy podobnie do poprzedniego, korzystając z tego, że $b \neq 0$ oraz $(a-1)^2+b^2 \neq 0$. Otrzymujemy ostatecznie (szczegóły obliczeń pozostawiamy jako ćwiczenie):

$$D = \left(\frac{(a-1)^2p + b\big((a-1)q+2b\big)}{(a-1)^2+b^2}, \frac{b\big((a-1)(p-2)+bq\big)}{(a-1)^2+b^2} \right).$$

Wreszcie zauważamy, że punkt F ma współrzędne $(p,0)$. Wyznaczamy teraz równanie prostej EF. Mamy najpierw

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FE} &= \left[\frac{a(ap+bq)}{a^2+b^2} - p, \frac{b(ap+bq)}{a^2+b^2} \right] = \left[\frac{abq-b^2p}{a^2+b^2}, \frac{b(ap+bq)}{a^2+b^2} \right] = \\ &= \frac{b}{a^2+b^2} \cdot [aq-bp, ap+bq].\end{aligned}$$

Prosta EF jest zatem prostopadła do wektora $[ap+bq, bp-aq]$ i przechodzi przez punkt $F=(p,0)$. Ma zatem równanie

$$(ap+bq)x + (bp-aq)y = (ap+bq)p,$$

czyli

$$(ap+bq)(x-p) + (bp-aq)y = 0.$$

Do tego równania podstawiamy współrzędne punktu D. Okaże się, że otrzymamy dokładnie równość (5.6), a więc okaże się, że punkt D leży na prostej EF wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Przypominamy

$$x = \frac{(a-1)^2p + b\big((a-1)q+2b\big)}{(a-1)^2+b^2}, \quad y = \frac{b\big((a-1)(p-2)+bq\big)}{(a-1)^2+b^2}.$$

Obliczmy najpierw $x-p$:

$$\begin{aligned}x-p &= \frac{(a-1)^2p + b\big((a-1)q+2b\big)}{(a-1)^2+b^2} - p = \\ &= \frac{(a-1)^2p + b\big((a-1)q+2b\big) - (a-1)^2p - b^2p}{(a-1)^2+b^2} = \\ &= \frac{b\big((a-1)q+2b-bp\big)}{(a-1)^2+b^2}.\end{aligned}$$

Mamy zatem równanie

$$(ap+bq) \cdot \frac{b\big((a-1)q+2b-bp\big)}{(a-1)^2+b^2} + (bp-aq) \cdot \frac{b\big((a-1)(p-2)+bq\big)}{(a-1)^2+b^2} = 0,$$

czyli

$$(ap+bq)\cdot\big((a-1)q+2b-bp\big)+(bp-aq)\cdot\big((a-1)(p-2)+bq\big)=0.$$

Mamy teraz

$$(ap+bq)\cdot\big((a-1)q+2b-bp\big)=a^2pq-apq+2abp-abp^2+abq^2-bq^2+2b^2q-b^2pq$$

oraz

$$(bp-aq)\cdot\big((a-1)(p-2)+bq\big)=abp^2-2abp-bp^2+2bp+b^2pq-a^2pq+2a^2q+apq-2aq-abq^2.$$

Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy równanie

$$-bq^2+2b^2q-bp^2+2bp+2a^2q-2aq=0,$$

czyli

$$bp^2+bq^2-2bp-2(a^2+b^2-a)q=0.$$

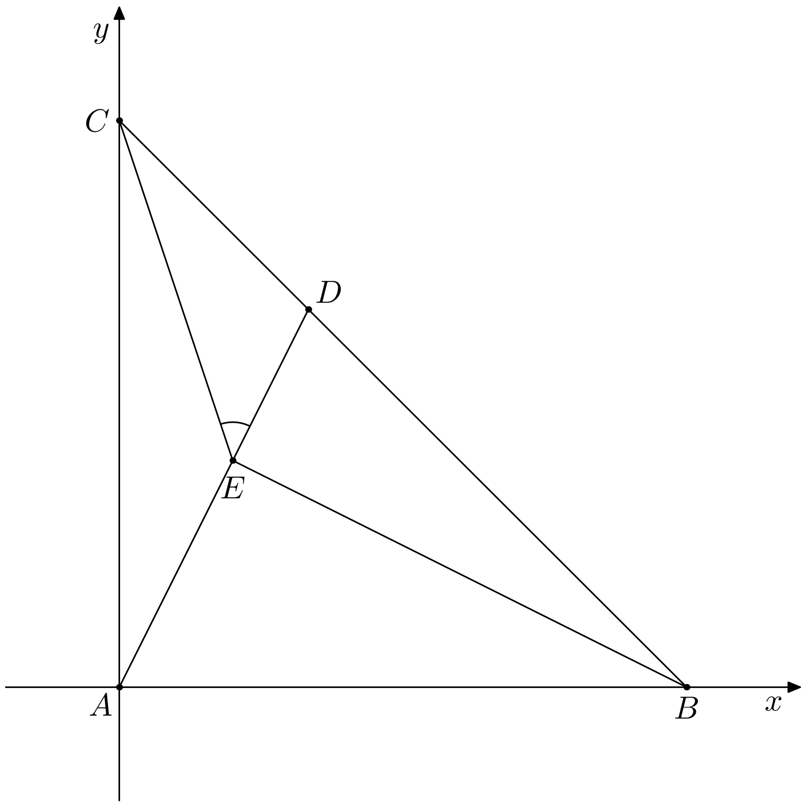
Otrzymaliśmy zatem równość (5.6), co kończy dowód twierdzenia.

CZĘŚĆ VI
ZADANIA OLIMPIJSKIE

W tej części pokażemy rozwiązania kilkunastu zadań olimpijskich. Są to zadania z zawodów I i II stopnia Olimpiad Matematycznych (od L Olimpiady Matematycznej do LIV Olimpiady Matematycznej).

Zadanie 6.1. (50 OM, I stopień, zadanie 3) W trójkącie równoramiennym ABC kąt BAC jest prosty. Punkt D leży na boku BC, przy czym $BD = 2 \cdot CD$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AD. Wyznaczyć miarę kąta CED.

Rozwiązanie. Umieśćmy trójkąt ABC w układzie współrzędnych w taki sposób, by $A = (0,0)$ oraz $B = (1,0)$.



Wówczas mamy oczywiście $C = (0,1)$ oraz $D = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Prosta AD ma zatem równanie $y = 2x$. Stąd łatwo dostajemy równanie prostej BE:

$$BE: \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

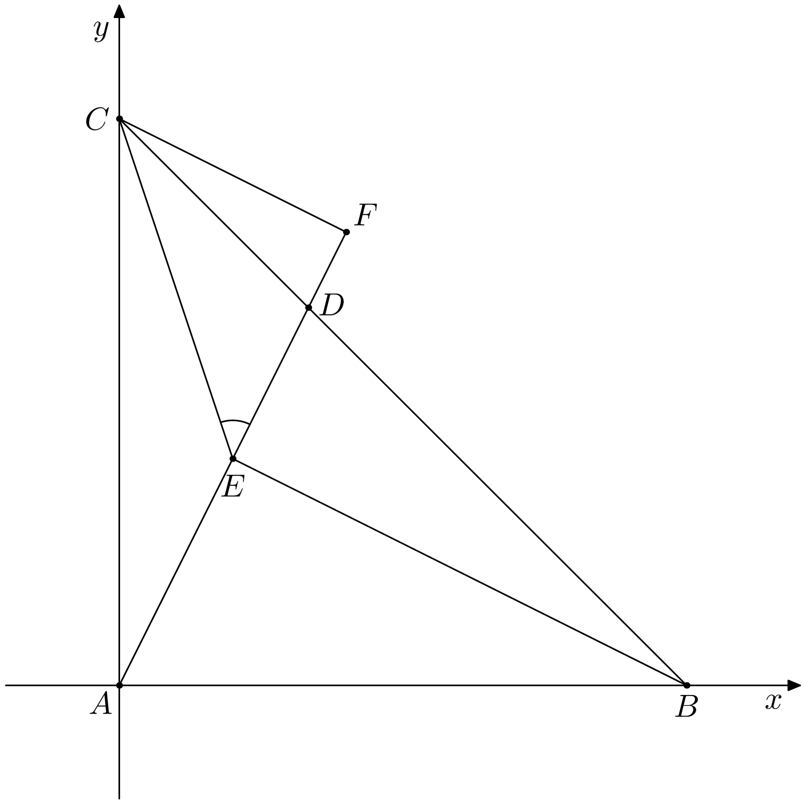
Współrzędne punktu E wyznaczamy rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Otrzymujemy
$$E = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right).$$
Miarę kąta CED wyznaczymy teraz ze wzoru
$$\cos(\measuredangle CED) = \frac{\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}}{|\overrightarrow{EC}| \cdot |\overrightarrow{ED}|}.$$
Mamy teraz
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{EC} &= \left[-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right], \\
\overrightarrow{ED} &= \left[\frac{2}{15}, \frac{4}{15}\right], \\
|\overrightarrow{EC}| &= \sqrt{\frac{4}{225} + \frac{16}{225}} = \sqrt{\frac{20}{225}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}, \\
|\overrightarrow{ED}| &= \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5}, \\
\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} &= -\frac{2}{75} + \frac{12}{75} = \frac{2}{15}, \\
|\overrightarrow{EC}| \cdot |\overrightarrow{ED}| &= \frac{2\sqrt{50}}{75} = \frac{10\sqrt{2}}{75} = \frac{2\sqrt{2}}{15}, \\
\cos(\measuredangle CED) &= \frac{2}{15} : \frac{2\sqrt{2}}{15} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ.
\end{aligned}$$
Zatem $\measuredangle CED = 45^\circ$.

Rozwiązanie 2.

Znów umieszczamy trójkąt ABC w układzie współrzędnych w taki sposób, by $A = (0,0)$ oraz $B = (1,0)$.



Wówczas mamy oczywiście $C = (0,1)$ oraz $D = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Podobnie jak w pierwszym rozwiązaniu wyznaczamy współrzędne punktu E:

$$E = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

Następnie punkt F jest rzutem punktu C na prostą AD. Równanie prostej CF ma postać

$$CF: \quad y = -\frac{1}{2}x + 1.$$

Łatwo wyznaczamy współrzędne punktu F:

$$F = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

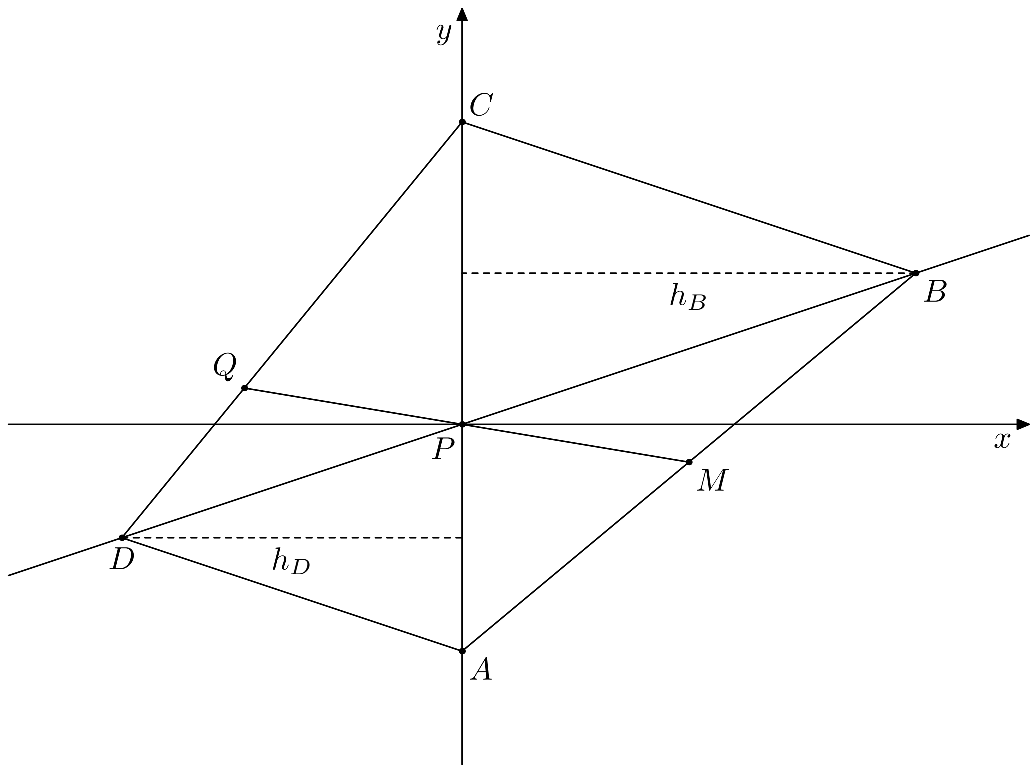
Następnie

$$|EF| = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$
$$|CF| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Zatem trójkąt CEF jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, skąd wynika, że $\measuredangle CED = \measuredangle CEF = 45°$.

Zadanie 6.2. (50 OM, I stopień, zadanie 6) Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Punkt M jest środkiem boku AB. Prosta MP przecina bok CD w punkcie Q. Dowieść, że stosunek pól trójkątów BCP i ADP jest równy stosunkowi długości odcinków CQ i DQ.

Rozwiązanie. Czworokąt $ABCD$ umieszczamy w układzie współrzędnych w taki sposób, by $P = (0, 0)$ oraz by wierzchołki A i C leżały na osi Oy. Niech $A = (0, 2a)$ oraz $C = (0, 2c)$, gdzie $a < 0$ i $c > 0$. Wierzchołki B i D leżą wtedy na pewnej prostej o równaniu $y = kx$, gdzie $k \in \mathbb{R}$. Niech $B = (2b, 2kb)$ oraz $D = (2d, 2kd)$. Punkty B i D leżą po przeciwnych stronach punktu P; zatem liczby b i d mają różne znaki. Niech $b > 0$ i $d < 0$.



Pole trójkąta BCP wyznaczamy ze wzoru:

$$P_{BCP} = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot h_B,$$

gdzie h_B oznacza wysokość opuszczoną z wierzchołka B na podstawę PC. Zatem

$$P_{BCP} = \frac{1}{2} \cdot 2c \cdot 2b = 2bc.$$

Podobnie

$$P_{ADP} = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot h_D = \frac{1}{2} \cdot (-2a) \cdot (-2d) = 2ad.$$

Zatem

$$\frac{P_{BCP}}{P_{ADP}} = \frac{bc}{ad}.$$

Następnie wyznaczamy współrzędne punktu M:

$$M = (b, a + kb).$$

Zatem prosta MP ma równanie:

$$MP: \quad y = \frac{a + kb}{b}x.$$

Teraz zauważamy, że $\overrightarrow{DC} = [-2d, 2c - 2kd]$ i stąd łatwo dostajemy równanie prostej CD:

$$CD: \quad (c - kd)x + dy = 2cd.$$

Współrzędne punktu Q otrzymujemy rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} y = \dfrac{a + kb}{b}x \\ (c - kd)x + dy = 2cd \end{cases}$$

Podstawiając wartość y z pierwszego równania do drugiego, otrzymujemy

$$(c - kd)x + d\frac{a + kb}{b}x = 2cd,$$

czyli

$$b(c - kd)x + d(a + kb)x = 2bcd.$$

Po otwarciu nawiasów otrzymujemy

$$(bc - kbd + ad + kbd)x = 2bcd,$$

czyli

$$(ad + bc)x = 2bcd.$$

Zauważamy następnie, że $ad + bc > 0$, więc

$$x = \frac{2bcd}{ad + bc}$$

i stąd

$$y = \frac{a + kb}{b} \cdot \frac{2bcd}{ad + bc} = \frac{2cd(a + kb)}{ad + bc}.$$

Zatem współrzędne punktu Q są równe:

$$Q = \left(\frac{2bcd}{ad + bc}, \frac{2cd(a + kb)}{ad + bc} \right).$$

Wyznaczamy teraz współrzędne wektorów $\overrightarrow{CQ}$ i $\overrightarrow{QD}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CQ} &= \left[\frac{2bcd}{ad+bc}, \frac{2cd(a+kb)}{ad+bc} - 2c\right] = \\ &= \left[\frac{2bcd}{ad+bc}, \frac{2acd+2kbcd-2bc^2-2acd)}{ad+bc}\right] = \\ &= \left[\frac{2bcd}{ad+bc}, \frac{2bc(kd-c)}{ad+bc}\right] = \\ &= \frac{2bc}{ad+bc}\cdot[d, kd-c].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QD} &= \left[2d - \frac{2bcd}{ad+bc}, 2kd - \frac{2cd(a+kb)}{ad+bc}\right] \\ &= \left[\frac{2bcd+2ad^2-2bcd}{ad+bc}, \frac{2kbcd+2kad^2-2acd-2kbcd}{ad+bc}\right] \\ &= \left[\frac{2ad^2}{ad+bc}, \frac{2kad^2-2acd}{ad+bc}\right] \\ &= \frac{2ad}{ad+bc}\cdot[d, kd-c].\end{aligned}$$

Oczywiście $[d, kd-c] \neq [0,0]$, gdyż $d \neq 0$. Zatem

$$\frac{|\overrightarrow{CQ}|}{|\overrightarrow{QD}|} = \frac{2bc}{ad+bc} : \frac{2ad}{ad+bc} = \frac{bc}{ad}.$$

To dowodzi, że

$$\frac{|\overrightarrow{CQ}|}{|\overrightarrow{QD}|} = \frac{P_{BCP}}{P_{ADP}},$$

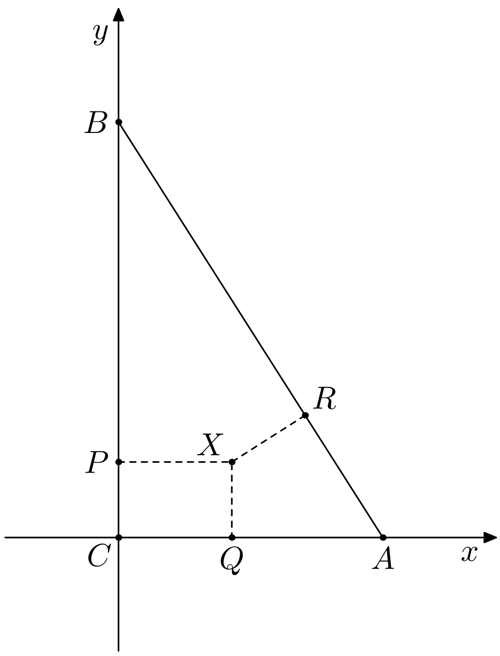
c. b. d. o.

Zadanie 6.3. (51 OM, I stopień, zadanie 6) Punkt X leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta ABC, w którym kąt C jest prosty. Punkty P, Q, R są odpowiednio rzutami punktu X na boki BC, CA i AB. Udowodnić, że równość

$$AR \cdot RB = BP \cdot PC + AQ \cdot QC$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt X leży na boku AB.

Rozwiązanie. Umieszczamy trójkąt ABC w układzie współrzędnych w taki sposób, by $C = (0, 0)$, $A = (a, 0)$ oraz $B = (0, b)$, przy czym $a > 0$ i $b > 0$. Niech następnie punkt X ma współrzędne (q, p).



Wówczas oczywiście $P = (0, p)$ oraz $Q = (q, 0)$. Ponieważ punkt X leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta ABC, więc $b \geq p \geq 0$ oraz $a \geq q \geq 0$.

Zauważmy następnie, że $\overrightarrow{AB} = [-a, b]$. Stąd łatwo otrzymujemy równania prostych AB i XR:

$$\begin{aligned} AB: &\quad bx + ay = ab, \\ XR: &\quad ax - by = aq - bp. \end{aligned}$$

Stąd wynika w szczególności, że punkt X leży na boku AB wtedy i tylko wtedy, gdy

$$ap + bq - ab = 0.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} bx + ay = ab \\ ax - by = aq - bp \end{cases}$$

otrzymujemy współrzędne punktu R:

$$x_R = \frac{a(aq - bp + b^2)}{a^2 + b^2}, \quad y_R = \frac{b(a^2 - aq + bp)}{a^2 + b^2}.$$

Możemy teraz wyznaczyć współrzędne wektorów $\overrightarrow{AR}$ i $\overrightarrow{RB}$. Mamy mianowicie

$$\overrightarrow{AR} = [x_R - a, y_R],$$

przy czym

$$x_R - a = \frac{a(aq - bp + b^2)}{a^2 + b^2} - a = \frac{a(aq - bp - a^2)}{a^2 + b^2} = \frac{-a(a^2 - aq + bp)}{a^2 + b^2}.$$

Zatem

$$\overrightarrow{AR} = \left[\frac{-a(a^2 - aq + bp)}{a^2 + b^2}, \frac{b(a^2 - aq + bp)}{a^2 + b^2}\right] = \frac{a^2 - aq + bp}{a^2 + b^2} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Podobnie

$$\overrightarrow{RB} = [-x_R, b - y_R],$$

przy czym

$$b - y_R = b - \frac{b(a^2 - aq + bp)}{a^2 + b^2} = \frac{b(b^2 + aq - bp)}{a^2 + b^2}.$$

Zatem

$$\overrightarrow{RB} = \left[\frac{-a(b^2 + aq - bp)}{a^2 + b^2}, \frac{b(b^2 + aq - bp)}{a^2 + b^2}\right] = \frac{b^2 + aq - bp}{a^2 + b^2} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Ponieważ $a \geq q$, więc $a^2 \geq aq \geq aq - bp$. Zatem $a^2 - aq + bp \geq 0$. Podobnie pokazujemy, że $b^2 + aq - bp \geq 0$. Zatem

$$AR = |\overrightarrow{AR}| = \frac{a^2 - aq + bp}{a^2 + b^2} \cdot |\overrightarrow{AB}| = \frac{a^2 - aq + bp}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Podobnie

$$RB = |\overrightarrow{RB}| = \frac{b^2 + aq - bp}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Zatem

$$AR \cdot RB = \frac{(a^2 - aq + bp)(b^2 + aq - bp)}{a^2 + b^2}.$$

Następnie

$$BP \cdot PC + AQ \cdot QC = (b - p)p + (a - q)q = aq + bp - p^2 - q^2.$$

Warunek

$$AR \cdot RB = BP \cdot PC + AQ \cdot QC$$

jest zatem równoważny warunkowi

$$(a^2 - aq + bp)(b^2 + aq - bp) = (a^2 + b^2)(aq + bp - p^2 - q^2).$$

Po otwarciu nawiasów, redukcji wyrazów podobnych i przeniesieniu wszystkich wyrazów na lewą stronę otrzymujemy warunek równoważny

$$a^2b^2 + a^2p^2 + b^2q^2 + 2abpq - 2a^2bp - 2ab^2q = 0.$$

Nietrudno zauważyć, że ten warunek jest równoważny warunkowi

$$(ap + bq - ab)^2 = 0,$$

czyli

$$ap + bq - ab = 0.$$

Zatem warunek

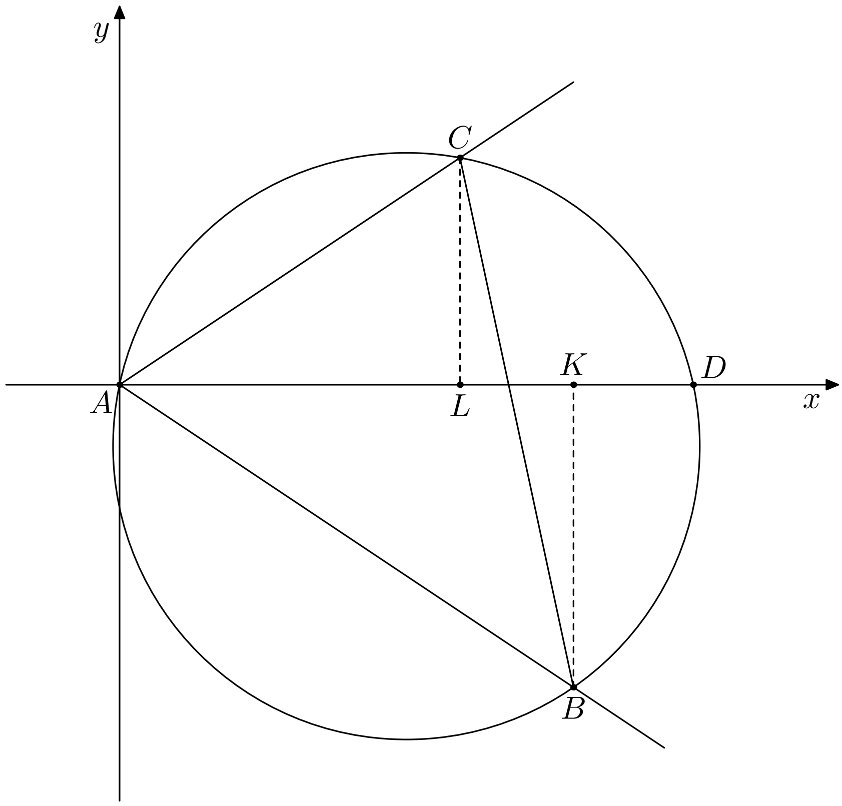
$$AR \cdot RB = BP \cdot PC + AQ \cdot QC$$

jest równoważny temu, że punkt X leży na boku AB, c. b. d. o.

Zadanie 6.4. (51 OM, II stopień, zadanie 2) Dwusieczna kąta BAC trójkąta ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D różnym od A. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i C na prostą AD. Dowieść, że

$$AD \geq BK + CL.$$

Rozwiązanie. Umieszczamy trójkąt ABC w układzie współrzędnych w taki sposób, by $A = (0, 0)$ oraz by dwusieczna kąta BAC pokrywała się z dodatnią półosią Ox.



Proste AB i AC mają wtedy odpowiednio równania $y = -kx$ oraz $y = kx$. Niech zatem $B = (b, -kb)$ oraz $C = (c, kc)$. Oczywiście $b > 0$ i $c > 0$. Niech wreszcie punkt (x, y) będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Punkt (x, y) jest równooddalony od wierzchołków A i B, spełnia zatem równanie

$$x^2 + y^2 = (x - b)^2 + (y + kb)^2,$$

które po uproszczeniu przyjmuje postać

$$2bx - 2kby = b^2(k^2 + 1).$$

Podobnie punkt (x, y) jest równooddalony od wierzchołków A i C, więc spełnia równanie

$$x^2 + y^2 = (x - c)^2 + (y - kc)^2.$$

Po uproszczeniu to równanie ma postać

$$2cx + 2kcy = c^2(k^2 + 1).$$

Zauważmy następnie, że punkt (x, y) leży na symetralnej odcinka AD. Zatem punkt D ma współrzędne $(2x, 0)$. Musimy więc wyznaczyć x z układu równań

$$\begin{cases} 2bx - 2kby = b^2(k^2 + 1) \\ 2cx + 2kcy = c^2(k^2 + 1) \end{cases}$$

Pierwsze z tych równań mnożymy przez c, drugie mnożymy przez b i dodajemy, otrzymując

$$4bcx = b^2c(k^2 + 1) + bc^2(k^2 + 1),$$

czyli

$$4bcx = bc(b + c)(k^2 + 1).$$

Ponieważ $bc \neq 0$, więc

$$x = \frac{(b + c)(k^2 + 1)}{4}.$$

Punkt D ma zatem współrzędne

$$D = \left(\frac{(b + c)(k^2 + 1)}{2}, 0\right).$$

Nierówność $AD \geq BK + CL$ przyjmuje zatem postać

$$\frac{(b + c)(k^2 + 1)}{2} \geq kb + kc,$$

czyli

$$\frac{(b + c)(k^2 + 1)}{2} \geq k(b + c).$$

Ponieważ $b + c > 0$, więc ta nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{k^2 + 1}{2} \geq k,$$

czyli

$$k^2 + 1 \geq 2k,$$

czyli

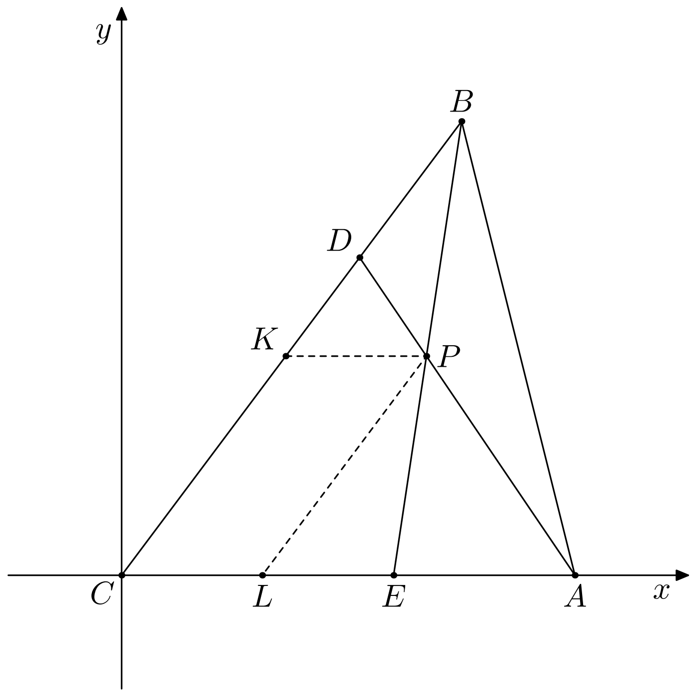
$$(k - 1)^2 \geq 0.$$

To dowodzi nierówności $AD \geq BK + CL$, c. b. d. o.

Zadanie 6.5. (52 OM, I stopień, zadanie 2) Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i AC, przy czym czworokąt $CLPK$ jest równoległobokiem. Dowieść, że

$$\frac{AE}{EL} = \frac{BD}{DK}.$$

Rozwiązanie. Umieśćmy trójkąt ABC w układzie współrzędnych w taki sposób, by $C = (0,0)$, $A = (1,0)$ oraz $B = (a,b)$, przy czym $b > 0$. Niech następnie $D = (ta, tb)$, gdzie $0 < t < 1$ oraz $E = (e, 0)$, gdzie $0 < e < 1$. Wreszcie niech $P = (p, q)$.



Równania prostych AD i BC mają postać:

$$\begin{aligned} AD:& \quad tbx + (1-ta)y = tb, \\ BE:& \quad bx + (e-a)y = be. \end{aligned}$$

Układ równań

$$\begin{cases} tbx + (1-ta)y = tb \\ bx + (e-a)y = be \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdyż

$$\begin{vmatrix} tb & 1-ta \\ b & e-a \end{vmatrix} = b(te-1) \neq 0.$$

Rozwiązując ten układ równań liniowych otrzymujemy współrzędne punktu $P = (p, q)$:

$$p = \frac{te - at - e + ate}{te - 1}, \quad q = \frac{bt(e-1)}{te-1}.$$

Następnie wyznaczamy współrzędne punktów K i L. Ponieważ punkt K leży na odcinku CB, więc $K = (ka, kb)$, gdzie $0 < k < 1$. Mamy jednak $kb = q$, gdyż $KP \parallel CL$. Zatem

$$k = \frac{q}{b} = \frac{t(e-1)}{te-1},$$

skąd dostajemy

$$K = \left(\frac{at(e-1)}{te-1}, \frac{bt(e-1)}{te-1}\right).$$

Zatem

$$\overrightarrow{CK} = \frac{t(e-1)}{te-1} \cdot [a, b] = \frac{t(e-1)}{te-1} \cdot \overrightarrow{CB}.$$

Ponieważ $\overrightarrow{PL} = -\overrightarrow{CK}$, więc

$$L = \left(p - \frac{at(e-1)}{te-1}, 0\right) = \left(\frac{e(t-1)}{te-1}, 0\right).$$

Mamy następnie

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CD} &= t \cdot \overrightarrow{CB},\\
\overrightarrow{DB} &= (1-t) \cdot \overrightarrow{CB},\\
\overrightarrow{CK} &= \frac{t(e-1)}{te-1} \cdot \overrightarrow{CB},\\
\overrightarrow{KD} &= \left(t - \frac{t(e-1)}{te-1}\right) \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{te(t-1)}{te-1} \cdot \overrightarrow{CB}.
\end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$DB = (1-t) \cdot CB,$$

$$KD = \frac{te(t-1)}{te-1} \cdot CB.$$

Oczywiście

$$AE = 1 - e,$$

$$EL = e - \frac{e(t-1)}{et-1} = \frac{et(e-1)}{et-1}.$$

Stąd wynika, że

$$BD \cdot EL = \frac{et(e-1)(1-t)}{te-1} \cdot CB$$

oraz

$$AE \cdot KD = \frac{te(t-1)(1-e)}{te-1} \cdot CB.$$

Zatem

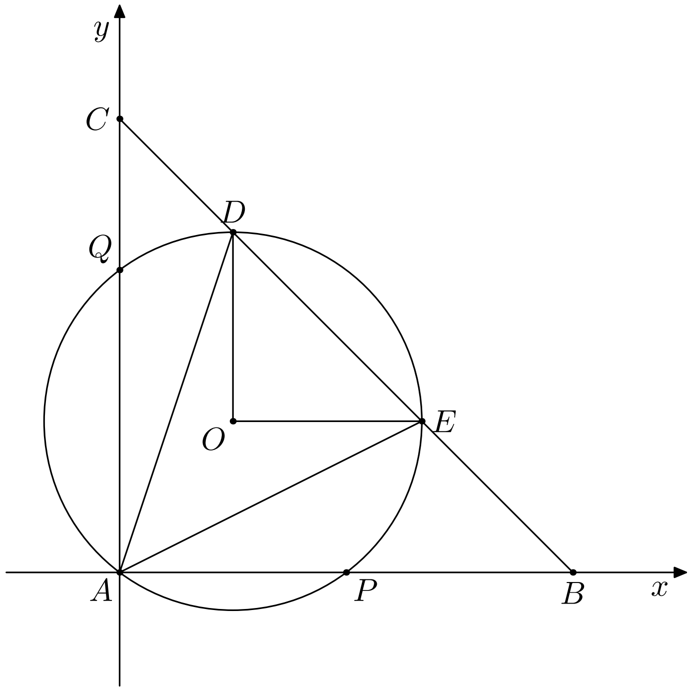
$$BD \cdot EL = AE \cdot KD,$$

czyli

$$\frac{AE}{EL} = \frac{BD}{DK}, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Zadanie 6.6. (52 OM, I stopień, zadanie 7) Dany jest trójkąt równoramienny ABC o kącie prostym przy wierzchołku A. Punkty D i E leżą na przeciwprostokątnej BC, przy czym $\measuredangle DAE = 45°$. Okrąg opisany na trójkącie ADE przecina boki AB i AC odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że $BP + CQ = PQ$.

Rozwiązanie. Umieszczamy trójkąt ABC w układzie współrzędnych w taki sposób, by $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ oraz $C = (0, 1)$. Można łatwo zauważyć, że prosta BC ma równanie $y = 1 - x$. Niech następnie $D = (t, 1 - t)$ i niech $O = (x_0, y_0)$ będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADE. Oczywiście $0 < t < 1$ (można łatwo pokazać, że $t < \frac{1}{2}$).



Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym wynika, że $\measuredangle DOE = 90°$. Zatem trójkąt ODE jest trójkątem prostokątnym równoramiennym, skąd wynika, że

$$\measuredangle ODE = \measuredangle OED = 45°.$$

Zatem prosta OD jest równoległa do osi Oy i prosta OE jest równoległa do osi Ox. Wyznaczymy teraz współrzędne punktu O.

Ponieważ $OD \perp AB$, więc $x_0 = t$. Wyznaczymy teraz drugą współrzędną punktu O. Punkt O jest równooddalony od punktów A i D. Mamy zatem równanie

$$t^2 + y_0^2 = (1 - t - y_0)^2.$$

Przekształćmy to równanie:

$$t^2 + y_0^2 = 1 + t^2 + y_0^2 - 2t - 2y_0 + 2ty_0,$$
$$1 - 2t - 2y_0 + 2ty_0 = 0,$$
$$2(1 - t)y_0 = 1 - 2t,$$
$$y_0 = \frac{1 - 2t}{2(1 - t)}.$$

Stąd wynika, że

$$O = \left(t, \frac{1-2t}{2(1-t)}\right).$$

Zauważmy następnie, że prosta OD jest symetralną odcinka AP. Stąd wynika, że $P = (2t, 0)$. Podobnie

$$Q = \left(0, \frac{1-2t}{1-t}\right).$$

Zatem

$$PB + QC = 1 - 2t + 1 - \frac{1-2t}{1-t} = \frac{2t^2 - 2t + 1}{1-t}.$$

Wreszcie

$$PQ^2 = (2t)^2 + \left(\frac{1-2t}{1-t}\right)^2 = \frac{4t^4 - 8t^3 + 8t^2 - 4t + 1}{(1-t)^2} = \frac{(2t^2 - 2t + 1)^2}{(1-t)^2}.$$

Ponieważ $2t^2 - 2t + 1 > 0$ oraz $1 - t > 0$, więc

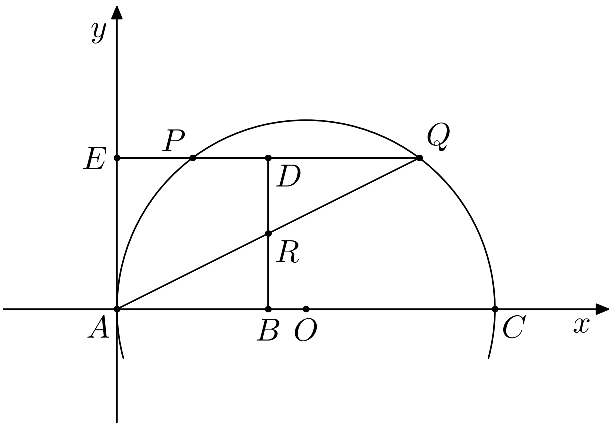
$$PQ = \frac{2t^2 - 2t + 1}{1-t},$$

czyli

$$PQ = PB + QC, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Zadanie 6.7. (52 OM, II stopień, zadanie 2) Punkty A, B, C leżą w tej właśnie kolejności na jednej prostej, przy czym $AB < BC$. Punkty D, E są wierzchołkami kwadratu $ABDE$. Okrąg o średnicy AC przecina prostą DE w punktach P i Q, przy czym punkt P należy do odcinka DE. Proste AQ i BD przecinają się w punkcie R. Udowodnić, że $DP = DR$.

Rozwiązanie. Umieśćmy punkty A, B i C w układzie współrzędnych w taki sposób, by $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ oraz $C = (2, 0)$. Środek okręgu o średnicy AC ma zatem współrzędne $O = (1, 0)$. Z założenia $AB < BC$ wynika, że $0 < b < 1$.



Punkty D i E mają współrzędne

$$D = (b, b), \quad E = (0, b).$$

Okrąg o średnicy AC ma równanie

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1,$$

czyli

$$x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

Punkty P i Q mają drugą współrzędną równą b. Pierwsze współrzędne otrzymamy podstawiając do równania okręgu $y = b$ i rozwiązując otrzymane równanie z niewiadomą x:

$$x^2 - 2x + b^2 = 0.$$

Pierwiastkami tego równania są

$$x_1 = 1 - \sqrt{1 - b^2}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{1 - b^2}.$$

Zatem

$$P = (1 - \sqrt{1 - b^2}, b), \quad Q = (1 + \sqrt{1 - b^2}, b).$$

Równanie prostej AQ ma postać

$$y = \frac{b}{1 + \sqrt{1 - b^2}} \cdot x.$$

Ponieważ

$$\frac{b}{1+\sqrt{1-b^2}} = \frac{b(1-\sqrt{1-b^2}}{(1+\sqrt{1-b^2})(1-\sqrt{1-b^2})} = \frac{b(1-\sqrt{1-b^2})}{b^2} = \frac{1-\sqrt{1-b^2}}{b},$$

więc to równanie ma postać

$$y = \frac{1-\sqrt{1-b^2}}{b} \cdot x.$$

Pierwsza współrzędna punktu R jest równa b. Drugą otrzymamy podstawiając w powyższym równaniu $x = b$. Otrzymamy wtedy

$$R = (b, 1-\sqrt{1-b^2}).$$

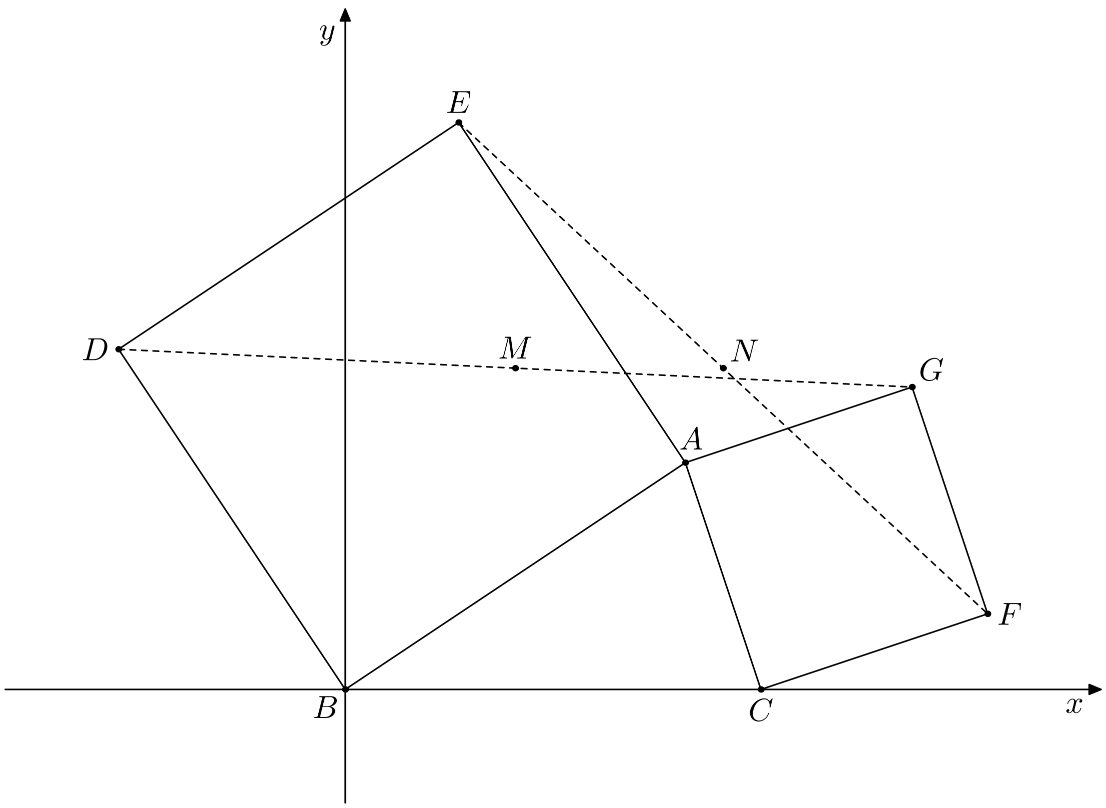
Zatem

$$EP = 1-\sqrt{1-b^2} = BR,$$

skąd wynika, że $DP = DR$, c. b. d. o.

Zadanie 6.8. (53 OM, I stopień, zadanie 2) Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF. Wyznaczyć możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$.

Rozwiązanie. Umieśćmy trójkąt ABC w układzie współrzędnych tak, by $B = (0, 0)$, $C = (1, 0)$ oraz $A = (a, b)$.



Przypomnijmy, że jeśli wektor o współrzędnych $[x, y]$ obrócimy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara o 90° wokół jego początku, to otrzymamy wektor $[-y, x]$. Mamy zatem

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BA} &= [a, b],\\
\overrightarrow{BD} &= [-b, a],\\
D &= (-b, a),\\
E &= (a - b, b + a).
\end{aligned}$$

Podobnie

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= [1 - a, -b],\\
\overrightarrow{AG} &= [b, 1 - a],\\
G &= (a - b, b + 1 - a),\\
F &= (1 - b, 1 - a).
\end{aligned}$$

Wreszcie

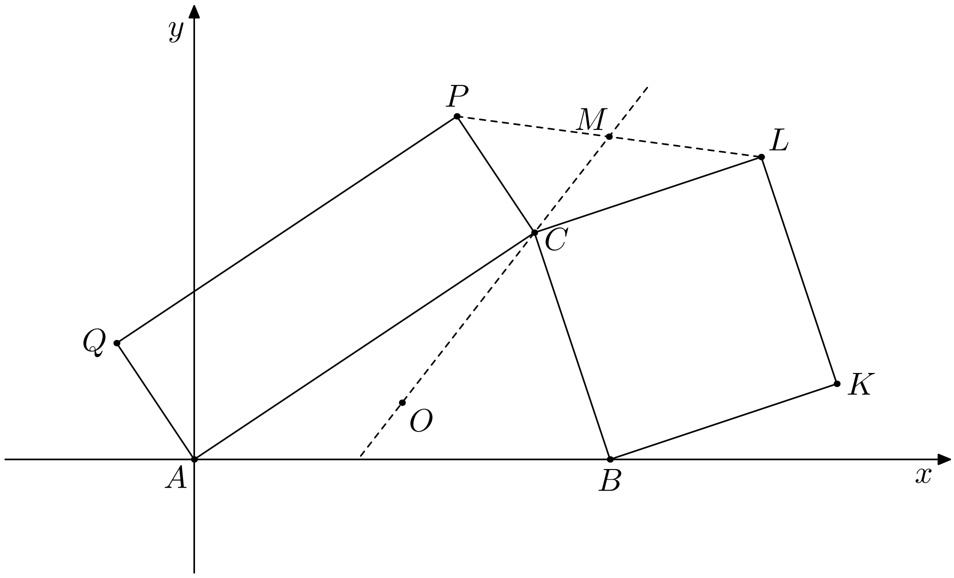
$$\begin{aligned}
M &= \left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}\right),\\
N &= \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right),\\
\overrightarrow{MN} &= \left[\frac{a+1-a}{2}, 0\right] = \left[\frac{1}{2}, 0\right] = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}.
\end{aligned}$$

Stąd dostajemy

$$MN : BC = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 6.9. (53 OM, III stopień, zadanie 2) Na bokach AC i BC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ACPQ$ i $BKLC$ o równych polach. Udowodnić, że środek odcinka PL, punkt C oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie. Umieśćmy trójkąt ABC w układzie współrzędnych tak, by $A = (0,0)$, $B = (1,0)$ oraz $C = (a,b)$. Oczywiście $b \neq 0$.



Znów korzystamy ze wzorów na współrzędne wektora obróconego o 90°. Mamy zatem $\overrightarrow{AC} = [a,b]$, skąd $\overrightarrow{AQ} = k \cdot [-b,a]$ dla pewnej liczby $k > 0$. Podobnie $\overrightarrow{CB} = [1-a,-b]$, skąd $\overrightarrow{CL} = l \cdot [b, 1-a]$ dla pewnej liczby $l > 0$. Pole prostokąta $ACPQ$ jest zatem równe

$$P_{ACPQ} = k \cdot |[-b,a]| \cdot |[a,b]| = k(a^2+b^2).$$

Podobnie obliczamy pole prostokąta $CBKL$:

$$P_{CBKL} = l \cdot |[b,1-a]| \cdot |[1-a,-b]| = l\big((1-a)^2+b^2\big).$$

Zatem

$$P_{ACPQ} = P_{CBKL} \quad \Leftrightarrow \quad k(a^2+b^2) = l(a^2-2a+1+b^2).$$

Wyznaczymy teraz współrzędne punktu $O = (x_0, y_0)$. Leży on na symetralnej odcinka AB, więc $x_0 = \frac{1}{2}$. Jest on też równooddalony od punktów A i C. Mamy zatem równanie

$$x_0^2 + y_0^2 = (x_0-a)^2 + (y_0-b)^2,$$

czyli po uproszczeniu

$$2by_0 = a^2+b^2-a.$$

Zatem

$$O = \left(\frac{1}{2}, \frac{a^2+b^2-a}{2b}\right).$$

Znajdziemy następnie współrzędne punktu M. Mamy kolejno

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AC} = [a, b],\\
&\overrightarrow{AQ} = k \cdot [-b, a] = [-kb, ka],\\
&P = (a - kb, b + ka),\\
&\overrightarrow{CB} = [1 - a, -b],\\
&\overrightarrow{CL} = l \cdot [b, 1 - a] = [lb, l - la],\\
&L = (a + lb, b + l - la),\\
&M = \left(\frac{2a - kb + lb}{2}, \frac{2b + ka + l - la}{2}\right).
\end{aligned}$$

Punkty O, C i M są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{CO}$ i $\overrightarrow{CM}$ są równoległe. Warunkiem równoległości wektorów $[p, q]$ i $[r, s]$ jest równość $ps = qr$. W naszym przypadku mamy

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CO} &= \left[\frac{1}{2} - a, \frac{a^2 + b^2 - a}{2b} - b\right] = \left[\frac{1 - 2a}{2}, \frac{a^2 - b^2 - a}{2b}\right],\\
\overrightarrow{CM} &= \left[\frac{2a - kb + lb}{2} - a, \frac{2b + ka + l - la}{a} - b\right] = \left[\frac{b(l - k)}{2}, \frac{(k - l)a + l}{2}\right].
\end{aligned}$$

Warunek współliniowości punktów O, C i M ma zatem postać

$$\frac{b(l - k)}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2 - a}{2b} = \frac{1 - 2a}{2} \cdot \frac{(k - l)a + l}{2},$$

czyli

$$b(l - k)(a^2 - b^2 - a) = b(1 - 2a)\big((k - l)a + l\big).$$

Ponieważ $b \neq 0$, więc możemy podzielić obie strony przez b:

$$(l - k)(a^2 - b^2 - a) = (1 - 2a)(ka - la + l),$$

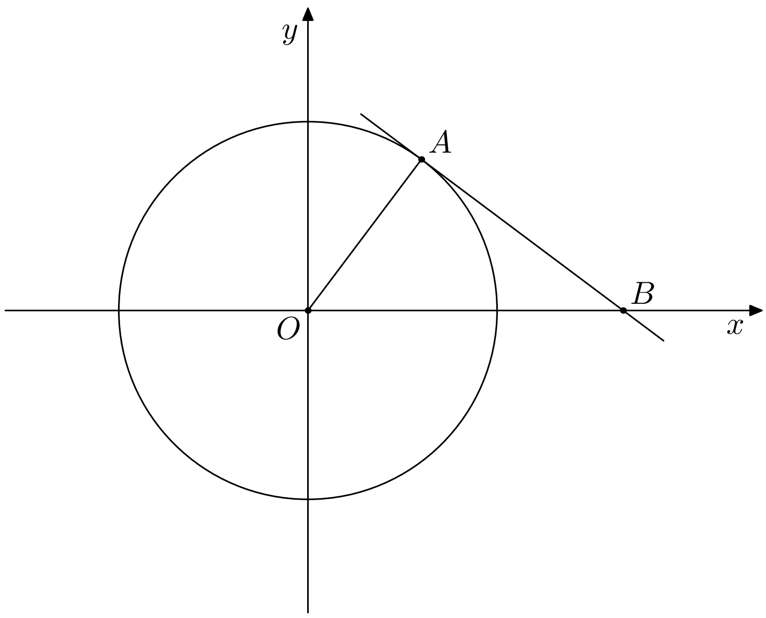
skąd dostajemy (po zgrupowaniu wyrazów zawierających k po jednej stronie i wyrazów zawierających l po drugiej stronie)

$$k(a^2 + b^2) = l(a^2 - 2a + 1 + b^2).$$

Zatem punkty O, C i M są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy pola prostokątów $ACPQ$ i $CBKL$ są równe, c. b. d. o.

Dwa lematy

Lemat 1. Styczna do okręgu o równaniu $x^2+y^2=r^2$ w punkcie $A=(b,c)$ ma równanie $bx+cy=r^2$. Jeśli $b\neq 0$, to styczna ta przecina oś Ox w punkcie $B=(\frac{r^2}{b},0)$.



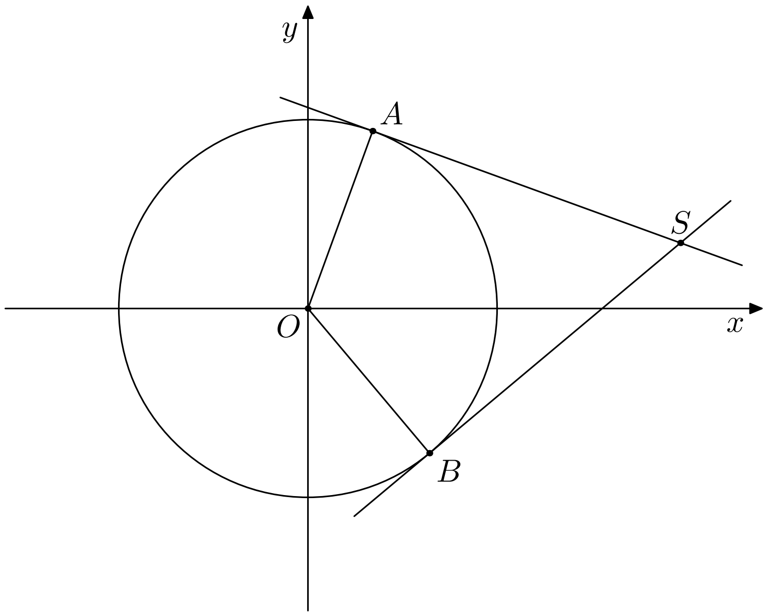
Dowód. Wektor $\overrightarrow{OA}$ o współrzędnych $[b,c]$ jest prostopadły do tej stycznej. Równanie stycznej ma zatem postać $bx+cy=d$. Podstawiając współrzędne punktu A w miejsce zmiennych x i y, otrzymujemy $d=b^2+c^2$. Podstawiając następnie $y=0$, otrzymujemy $x=\frac{r^2}{b}$, c. b. d. o.

Wniosek. Styczna do okręgu o równaniu $x^2+y^2=1$ w punkcie $A=(b,c)$ ma równanie $bx+cy=1$. Jeśli $b\neq 0$, to przecina ona oś Ox w punkcie $B=(\frac{1}{b},0)$.

Lemat 2. Styczne do okręgu o równaniu $x^2+y^2=r^2$ w punktach $A=(b,c)$ i $B=(p,q)$ przecinają się w punkcie S o współrzędnych

$$S=\left(\frac{(q-c)r^2}{bq-cp},\frac{(b-p)r^2}{bq-cp}\right).$$

Styczne te są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $[b,c]$ i $[p,q]$ są równoległe (tzn. gdy $bq=cp$, czyli punkty A i B pokrywają się lub są końcami tej samej średnicy).



Dowód. Mamy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} bx+cy=r^2 \\ px+qy=r^2 \end{cases}$$

Układ ten ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $bq-cp\neq 0$ i jego rozwiązanie ma postać

$$x=\frac{(q-c)r^2}{bq-cp},\quad y=\frac{(b-p)r^2}{bq-cp},$$

c. b. d. o.

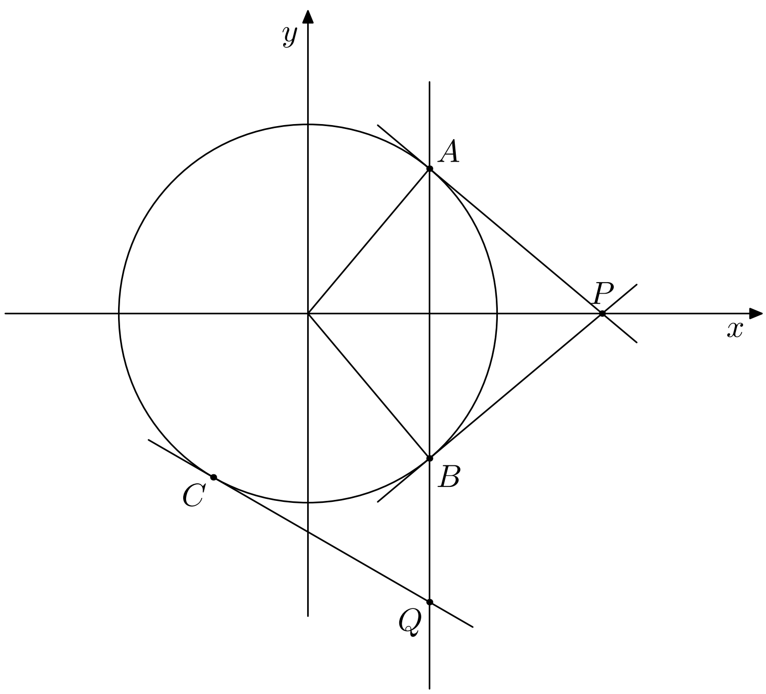
Wniosek. Styczne do okręgu o równaniu $x^2+y^2=1$ w punktach $A=(b,c)$ i $B=(p,q)$ przecinają się w punkcie S o współrzędnych

$$S=\left(\frac{q-c}{bq-cp},\frac{b-p}{bq-cp}\right).$$

Styczne te są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $bq=cp$.

Zadanie 6.10. (54 OM, I stopień, zadanie 3) Trzy różne punkty A, B, C leżą na okręgu o. Proste styczne do okręgu o w punktach A i B przecinają się w punkcie P. Prosta styczna do okręgu o w punkcie C przecina prostą AB w punkcie Q. Udowodnić, że $PQ^2 = PB^2 + QC^2$.

Rozwiązanie. Umieszczamy środek okręgu w początku układu współrzędnych i przyjmujemy promień okręgu za jednostkę. Nasz okrąg ma wtedy równanie $x^2+y^2 = 1$. Niech punkty A, B i C mają wtedy współrzędne $A = (a, b)$, $B = (a, -b)$ i $C = (p, q)$. Styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się wtedy w punkcie $P = (\frac{1}{a}, 0)$. Prosta AB ma równanie $x = a$. Styczna do okręgu w punkcie C ma równanie $px + qy = 1$ i przecina prostą AB w punkcie $Q = (a, \frac{1-ap}{q})$. Oczywiście $q \neq 0$, gdyż z założenia styczna do okręgu w punkcie C przecina prostą AB.



Mamy wtedy

$$PQ^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1-ap}{q}\right)^2,$$

$$PB^2 = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + b^2,$$

$$CQ^2 = (p-a)^2 + \left(q - \frac{1-ap}{q}\right)^2.$$

Równość $PQ^2 = PB^2 + QC^2$ zostanie udowodniona, jeśli pokażemy, że

$$b^2 + (p-a)^2 + \left(q - \frac{1-ap}{q}\right)^2 = \left(\frac{1-ap}{q}\right)^2.$$

Przekształcamy zatem tę równość w sposób równoważny:

$$
\begin{gathered}
b^2 + p^2 - 2ap + a^2 + q^2 - 2q\frac{1-ap}{q} + \left(\frac{1-ap}{q}\right)^2 = \left(\frac{1-ap}{q}\right)^2, \\
b^2 + p^2 - 2ap + a^2 + q^2 - 2(1-ap) = 0, \\
a^2 + b^2 + p^2 + q^2 - 2ap - 2 + 2ap = 0, \\
a^2 + b^2 + p^2 + q^2 = 2.
\end{gathered}
$$

Ta ostatnia równość jest prawdziwa, gdyż punkty A i C leżą na okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$, c. b. d. o.

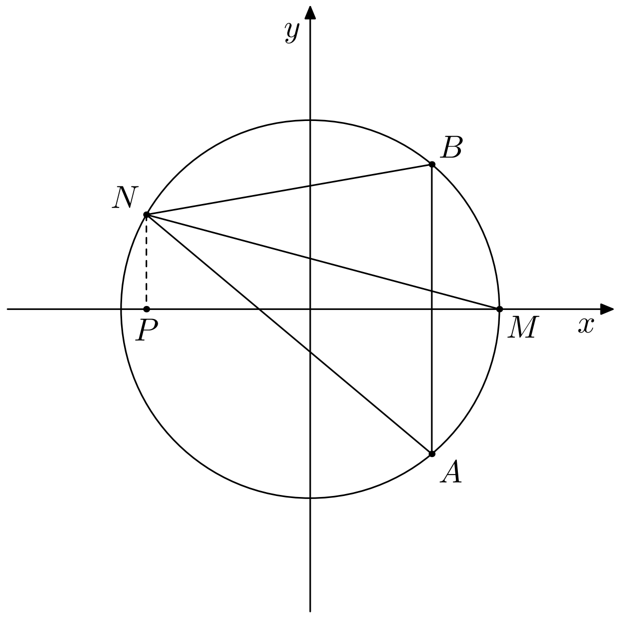
Zadanie 6.11. (54 OM, I stopień, zadanie 6) Punkty A, B, C, D leżą w tej właśnie kolejności na okręgu o. Punkt M jest środkiem tego łuku AB okręgu o, który nie zawiera punktów C i D; punkt N jest środkiem tego łuku CD okręgu o, który nie zawiera punktów A i B. Dowieść, że

$$\frac{AN^2 - BN^2}{AB} = \frac{DM^2 - CM^2}{CD}.$$

Rozwiązanie. Umieszczamy środek okręgu w początku układu współrzędnych i przyjmujemy, że promień okręgu jest równy 1. Równanie okręgu ma zatem postać $x^2+y^2 = 1$. Przyjmijmy następnie, że punkty A i B mają współrzędne $A = (a, b)$ oraz $B = (a, -b)$ (zatem $b < 0$). Załóżmy następnie, że punkt M ma współrzędne $M = (1, 0)$ (tzn. punkty C i D leżą „na lewo” od punktów A i B, czyli ich pierwsze współrzędne są mniejsze od a). Niech wreszcie punkt $N = (p, q)$ będzie środkiem łuku CD. Obliczymy wartość wyrażenia

$$\frac{AN^2 - BN^2}{AB}.$$

Do obliczenia wartości tego wyrażenia nie są potrzebne współrzędne punktów C i D; istotne jest tylko to, gdzie leży środek łuku CD.



Mamy zatem

$$AN^2 = (a-p)^2 + (b-q)^2 = a^2 - 2ap + p^2 + b^2 - 2bq + q^2 = 2 - 2ap - 2bq$$

oraz

$$BN^2 = (a-p)^2 + (b+q)^2 = a^2 - 2ap + p^2 + b^2 + 2bq + q^2 = 2 - 2ap + 2bq.$$

Stąd wynika, że $AN^2 - BN^2 = -4bq$. Mamy też $AB = -2b$. Stąd wynika, że

$$\frac{AN^2 - BN^2}{AB} = 2q.$$

Zatem wartość wyrażenia

$$\frac{AN^2 - BN^2}{AB}$$

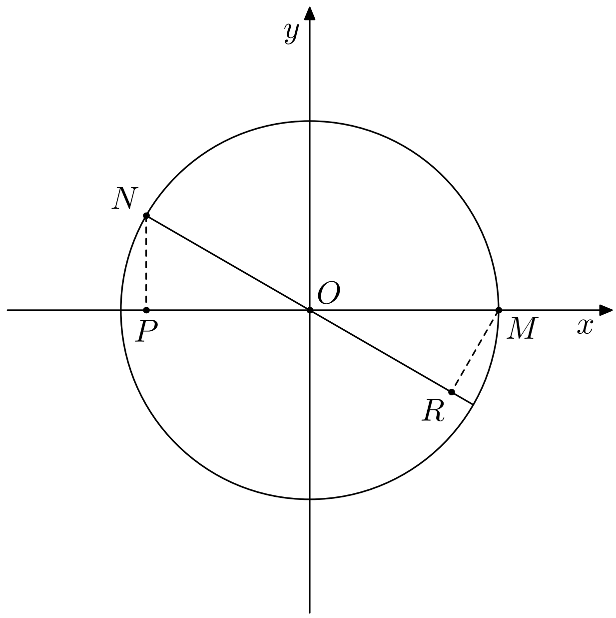
jest równa podwojonej odległości punktu N od średnicy, której jednym z końców jest punkt M, wziętej ze znakiem plus, jeśli $AN > BN$ i ze znakiem minus, jeśli $AN < BN$.

W podobny sposób pokazujemy, że wartość wyrażenia

$$\frac{DM^2 - CM^2}{CD}$$

jest równa podwojonej odległości punktu M od średnicy, której jednym z końców jest punkt N, wzięta ze znakiem plus lub minus w zależności od tego, czy $DM > CM$, czy $DM < CM$.

Zauważmy następnie, że z położenia punktów A, B, C i D na okręgu (tzn. z tego, że leżą one w tej kolejności) wynika, że $AN > BN$ wtedy i tylko wtedy, gdy $DM > CM$. Zatem wystarczy dowieść, że odległość punktu N od średnicy, której końcem jest punkt M, jest równa odległości punktu M od średnicy, której końcem jest punkt N.



Inaczej mówiąc, mamy dowieść, że $NP = MR$. To jednak wynika natychmiast z przystawania trójkątów OPN i ORM, c. b. d. o.

Zadanie 6.12. (54 OM, I stopień, zadanie 11) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P i Q, różne od wierzchołków czworokąta, leżą odpowiednio na bokach BC i CD, przy czym $\measuredangle BAP = \measuredangle DAQ$. Udowodnić, że trójkąty ABP i ADQ mają równe pola wtedy i tylko wtedy, gdy ich ortocentra leżą na prostej prostopadłej do AC.
Uwaga. Ortocentrum trójkąta to punkt przecięcia wysokości.

Rozwiązanie. Umieszczamy czworokąt $ABCD$ w układzie współrzędnych w taki sposób, by $A = (0,0)$ i by dodatnia półoś Ox była dwusieczną kąta A. Wtedy jest ona także dwusieczną kąta PAQ. Niech następnie równania prostych AQ i AD mają postać

$$AQ: \ y = kx, \quad AD: \ y = lx,$$

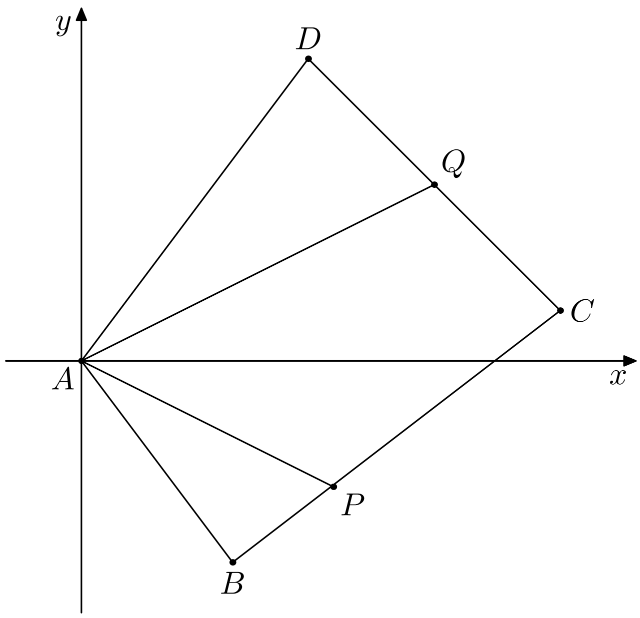
gdzie $l > k > 0$. Wtedy równania prostych AP i AB mają postać

$$AP: \ y = -kx, \quad AB: \ y = -lx.$$

Przyjmijmy następnie, że punkty B, D, P i Q mają współrzędne

$$B = (b, -lb), \quad D = (d, ld), \quad P = (p, -kp), \quad Q = (q, kq),$$

gdzie $b, d, p, q > 0$. Ponieważ punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD czworokąta $ABCD$, więc proste BP i DQ przecinają się. Punktem przecięcia jest wierzchołek C.



Wyznaczymy najpierw współrzędne wierzchołka C. Zauważmy zatem, że równania prostych BP i DQ mają postać:

$$BP: (lb - kp)x + (b - p)y = (l - k)bp,$$
$$DQ: (ld - kq)x + (q - d)y = (l - k)dq.$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy

$$C=\left(\frac{(l-k)\big(pq(b+d)-bd(p+q)\big)}{(k+l)(bq+dp)-2(kpq+bdl)},\frac{(l-k)\big(kpq(b-d)+bdl(q-p)\big)}{(k+l)(bq+dp)-2(kpq+bdl)}\right).$$

Z założenia wynika, że $(k+l)(bq+dp)-2(kpq+bdl)\neq 0$. Teraz mamy

$$\overrightarrow{AC}=\frac{l-k}{(k+l)(bq+dp)-2(kpq+bdl)}\cdot\big[pq(b+d)-bd(p+q),kpq(b-d)+bdl(q-p)\big].$$

Następnie wyznaczamy współrzędne ortocentrów trójkątów ABP i ADQ. Nietrudne obliczenia dają następujące wyniki. Ortocentrum G trójkąta ABP ma współrzędne

$$G=\left(\frac{kl+1}{l-k}(bl-kp),\frac{kl+1}{l-k}(b-p)\right).$$

Ortocentrum H trójkąta ADQ ma natomiast współrzędne

$$H=\left(\frac{kl+1}{l-k}(dl-kq),\frac{kl+1}{l-k}(q-d)\right).$$

Stąd wynika, że

$$\overrightarrow{GH}=\frac{kl+1}{l-k}\cdot\big[dl-kq-bl+kp,q-d-b+p\big].$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by prosta GH była prostopadła do przekątnej AC, jest równość $\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Do tego z kolei potrzeba i wystarcza, by

$$\big[dl-kq-bl+kp,q-d-b+p\big]\cdot\big[pq(b+d)-bd(p+q),kpq(b-d)+bdl(q-p)\big]=0,$$

czyli

$$(dl-kq-bl+kp)\cdot\big(pq(b+d)-bd(p+q)\big)+(q-d-b+p)\cdot\big(kpq(b-d)+bdl(q-p)\big)=0,$$

Po otwarciu nawiasów i redukcji wyrazów podobnych otrzymamy równość równoważną

$$2(bkp^2q-dkpq^2+b^2dlp-bd^2lq)+d^2lpq+bdkq^2+d^2kpq+bdlq^2-b^2lpq-bdkp^2-b^2kpq-bdlp^2=0.$$

Grupujemy wyrazy:

$$2bp(kpq+bdl)-2dq(kpq+bdl)+dq(dlp+bkq+dkp+blq)-bp(blq+dkp+bkq+dlp)=0,$$

czyli

$$(dq-bp)(dlp+bkq+dkp+blq)-2(kpq+bdl)(dq-bp)=0,$$

czyli

$$(dq - bp)\big((k+l)(bq+dp) - 2(kpq+bdl)\big) = 0.$$

Zatem

$$\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \;\Leftrightarrow\; (dq-bp) \cdot \big((k+l)(bq+dp) - 2(kpq+bdl)\big) = 0.$$

Ponieważ $(k+l)(bq+dp) - 2(kpq+bdl) \neq 0$, więc ostatecznie

$$\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \;\Leftrightarrow\; dq - bp = 0.$$

Zbadamy teraz, kiedy pola trójkątów ABP i ADQ są równe. Ponieważ kąty BAP i DAQ są równe, więc

$$P_{ABP} = P_{ADQ} \;\Leftrightarrow\; |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AQ}|.$$

Mamy następnie

$$\begin{aligned}
\big|\overrightarrow{AB}\big| &= \big|[b,-lb]\big| = b \cdot \big|[1,-l]\big| = b\sqrt{1+l^2},\\
\big|\overrightarrow{AP}\big| &= \big|[p,-kp]\big| = p \cdot \big|[1,-k]\big| = p\sqrt{1+k^2},\\
\big|\overrightarrow{AD}\big| &= \big|[d,ld]\big| = d \cdot \big|[1,l]\big| = d\sqrt{1+l^2},\\
\big|\overrightarrow{AQ}\big| &= \big|[q,kq]\big| = q \cdot \big|[1,k]\big| = q\sqrt{1+k^2}.
\end{aligned}$$

Zatem

$$P_{ABP} = P_{ADQ} \;\Leftrightarrow\; bp\sqrt{(1+k^2)(1+l^2)} = dq\sqrt{(1+k^2)(1+l^2)},$$

czyli

$$P_{ABP} = P_{ADQ} \;\Leftrightarrow\; bp = dq.$$

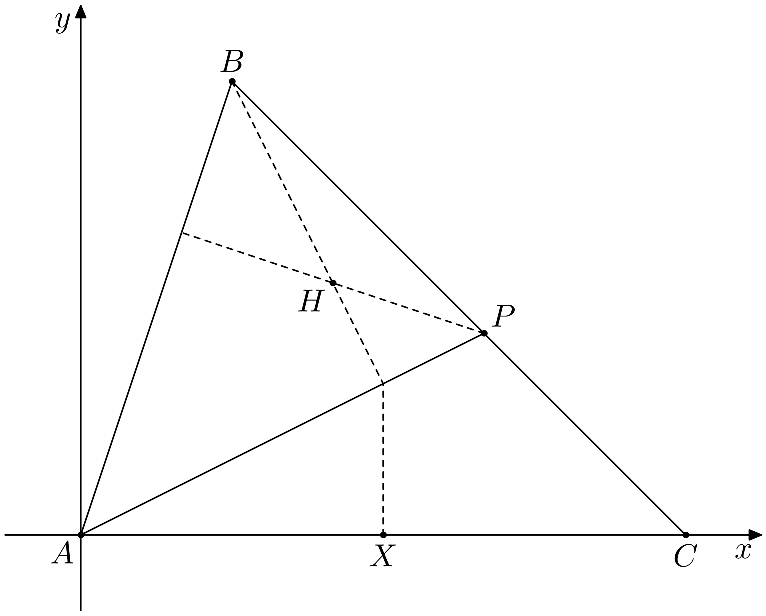
Ostaecznie dostajemy

$$\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \;\Leftrightarrow\; P_{ABP} = P_{ADQ},$$

c. b. d. o.

Rozwiązanie 2. Rozpatrujemy tylko trójkąt ABC i umieszczamy go w układzie współrzędnych tak, by $A=(0,0)$, $C=(1,0)$ oraz $B=(a,b)$. Chcemy pokazać, że pierwsza współrzędna ortocentrum trójkąta ABP zależy wyłącznie od pola tego trójkąta i od kąta BAP. Wyniknie stąd, że jeśli pola trójkątów ABP i ADQ są równe i kąty BAP i DAQ są równe, to rzuty prostokątne ortocentrów trójkątów ABP i ADQ na oś Ox pokrywają się, czyli prosta łącząca te ortocentra jest prostopadła do prostej AC.

Oznaczmy $\measuredangle BAP=\varphi$. Niech wreszcie $P=(p,q)$.



Zauważmy, że

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AP}|}$$

i stąd

$$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AP}|=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}}{\cos\varphi}.$$

Następnie

$$P_{ABP}=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AP}|\cdot\sin\varphi=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}\cdot\operatorname{tg}\varphi.$$

Stąd dostajemy

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=2P_{ABP}\cdot\operatorname{ctg}\varphi.$$

Równanie prostej BC ma postać

$$bx+(1-a)y-b=0.$$

Ponieważ punkt P leży na prostej BC, więc

$$bp+(1-a)q-b=0,$$

czyli
$$bp - aq = b - q.$$
Zauważmy następnie, że $b - q \neq 0$, gdyż prosta BP nie jest równoległa do osi Ox.

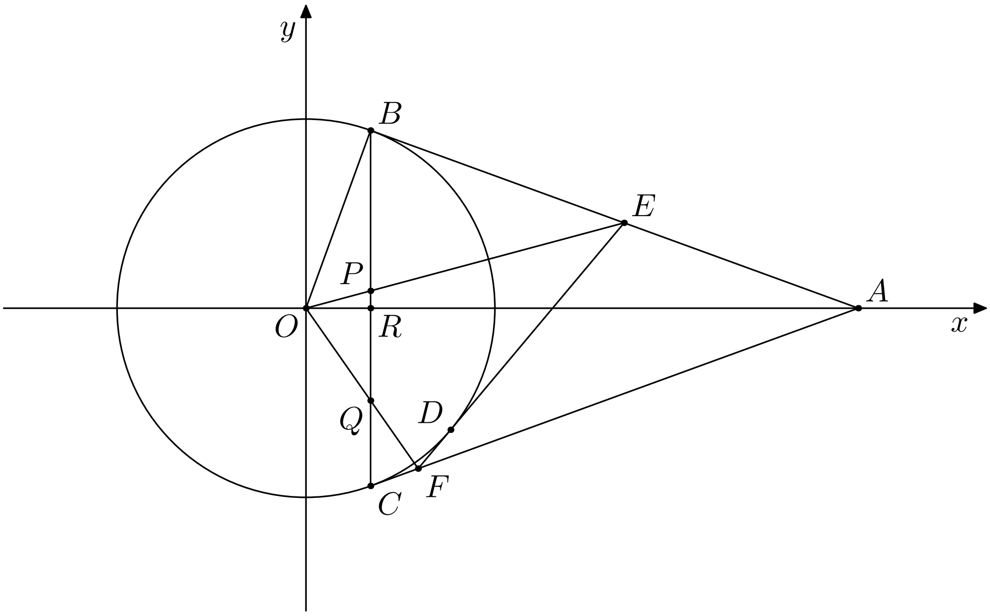
Wyznaczamy teraz pierwszą współrzędną ortocentrum trójkąta ABP. Prosta AB ma równanie
$$y = \frac{b}{a} \cdot x.$$
Stąd łatwo dostajemy równanie prostej zawierającej wysokość opuszczoną na bok AB:
$$y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{a}{b} \cdot p + q.$$
W podobny sposób wyznaczamy równanie prostej zawierającej wysokość opuszczoną na bok AP:
$$y = -\frac{p}{q} \cdot x + \frac{p}{q} \cdot a + b.$$
Szukaną pierwszą współrzędną ortocentrum wyznaczymy z równania
$$-\frac{a}{b} \cdot x + \frac{a}{b} \cdot p + q = -\frac{p}{q} \cdot x + \frac{p}{q} \cdot a + b.$$
Przekształcamy to równanie w sposób równoważny:
$$\begin{gathered}
-aqx + apq + bq^2 = -bpx + abp + b^q, \\
(bp - aq)x = abp + b^2q - apq - bq^2, \\
(bp - aq)x = ap(b - q) + bq(b - q), \\
(bp - aq)x = (b - q)(ap + bq).
\end{gathered}$$
Ponieważ $bp - aq = b - q \neq 0$, więc
$$x = ap + bq = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 2P_{ABP} \cdot \operatorname{ctg} \varphi.$$
Pokazaliśmy więc, że pierwsza współrzędna ortocentrum trójkąta ABP zależy wyłacznie od pola tego trójkąta i od kąta BAP, c. b. d. o.

Zadanie 6.13. (54 OM, II stopień, zadanie 5) Punkt A leży na zewnątrz okręgu o o środku O. Z punktu A poprowadzono dwie styczne do okręgu odpowiednio w punktach B i C. Pewna styczna do okręgu o przecina odcinki AB i AC odpowiednio w punktach E i F. Proste OE i OF przecinają odcinek BC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnić, że z odcinków BP, PQ i QC można zbudować trójkąt podobny do trójkąta AEF.

Rozwiązanie. Umieszczamy okrąg w układzie współrzędnych tak, by $O = (0, 0)$. Przyjmujemy jednostkę równą promieniowi okręgu. Nasz okrąg ma zatem równanie

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Następnie umieszczamy punkty B i C tak, by prosta BC była prostopadła do osi Ox. Punkt A będzie wtedy leżał na tej osi. Niech zatem $B = (b, c)$ oraz $C = (b, -c)$, przy czym $b > 0$. Oczywiście $b^2 + c^2 = 1$.



Niech następnie prosta EF będzie styczna do okręgu w punkcie $D = (p, q)$. Z lematów 1 i 2 wynika, że

$$A = \left(\frac{1}{b}, 0\right),$$

$$E = \left(\frac{q-c}{bq-cp}, \frac{b-p}{bq-cp}\right),$$

$$F = \left(\frac{q+c}{bq+cp}, \frac{b-p}{bq+cp}\right).$$

Równanie prostej OE ma postać

$$y = \frac{b-p}{q-c} \cdot x$$

i z niego łatwo wyznaczamy współrzędne punktu P:

$$P = \left(b, \frac{b-p}{q-c} \cdot b\right).$$

Mamy teraz

$$BP = c - \frac{(b-p)b}{q-c} = \frac{cq - c^2 - b^2 + bp}{q-c} = \frac{bp + cq - 1}{q-c}.$$

Następnie

$$\begin{aligned}
AF^2 &= \left(\frac{q+c}{bq+cp} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{b-p}{bq+cp}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{b(q+c) - (bq+cp)}{(bq+cp)b}\right)^2 + \left(\frac{b-p}{bq+cp}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{bq + bc - bq - cp}{(bq+cp)b}\right)^2 + \left(\frac{b-p}{bq+cp}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{(b-p)c}{(bq+cp)b}\right)^2 + \left(\frac{b-p}{bq+cp}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{b-p}{bq+cp}\right)^2 \cdot \left(\frac{c^2}{b^2} + 1\right) = \\
&= \left(\frac{b-p}{bq+cp}\right)^2 \cdot \left(\frac{b^2+c^2}{b^2}\right) = \\
&= \left(\frac{b-p}{bq+cp}\right)^2 \cdot \frac{1}{b^2}.
\end{aligned}$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned}
\frac{BP^2}{AF^2} &= \left(\frac{bp+cq-1}{q-c}\right)^2 \cdot \left(\frac{bq+cp}{b-p}\right)^2 \cdot b^2 = \left(\frac{(bp+cq-1)(bq+cp)}{(q-c)(b-p)}\right)^2 \cdot b^2 = \\
&= \left(\frac{b^2pq + bcp^2 + bcq^2 + c^2pq - bq - cp}{(q-c)(b-p)}\right)^2 \cdot b^2 = \\
&= \left(\frac{(b^2+c^2)pq + bc(p^2+q^2) - bq - cp}{(q-c)(b-p)}\right)^2 \cdot b^2 = \\
&= \left(\frac{pq + bc - bq - cp}{bq - pq - bc + cp}\right)^2 \cdot b^2 = (-1)^2 \cdot b^2 = b^2.
\end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{BP}{AF} = b.$$

Podobnie

$$\frac{CQ}{AE} = b.$$

Zauważmy teraz, że $BC = 2BR$ oraz

$$\frac{BR}{AB} = \frac{OR}{OB} = b.$$

Stąd

$$\frac{BC}{2AB} = b.$$

Następnie

$$BC = BP + PQ + CQ$$

oraz

$$2AB = AB + AC = AE + EB + AF + CF = AE + AF + ED + FD = AE + AF + EF.$$

Zatem

$$BP + PQ + CQ = b \cdot (AE + AF + EF).$$

Jednocześnie

$$BP = b \cdot AF \quad \text{oraz} \quad CQ = b \cdot AE.$$

Stąd mamy

$$b \cdot AF + PQ + b \cdot AE = b \cdot AE + b \cdot AF + b \cdot EF,$$

czyli

$$PQ = b \cdot EF.$$

Ostatecznie

$$\frac{BP}{AF} = \frac{CQ}{AE} = \frac{PQ}{EF}, \quad \text{c. b. d. o.}$$